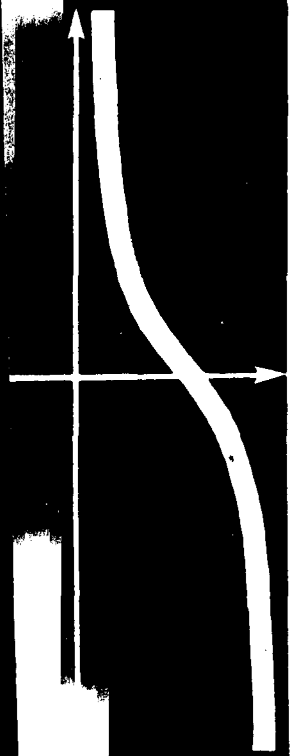
АЛГЕБРА І ПАЧАТКІ АНАЛІЗУ 10-11

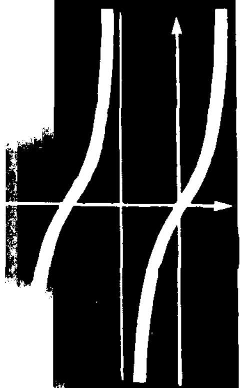
10-11

# АЛГЕБРА
## ПАЧАТКІ АНАЛІЗУ









$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  $\quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$  $\quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

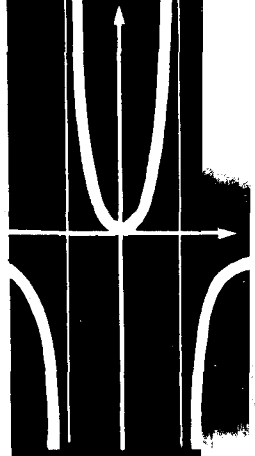
$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$



$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  $\quad \sin' x = \cos x$

$(a^x)' = a^x \ln a$  $\quad \cos' x = -\sin x$

$\log_a' x = \dfrac{1}{x\ln a}$  $\quad \operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

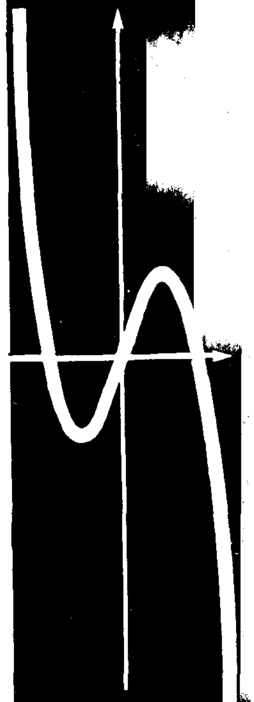
$\ln' x = \dfrac{1}{x}$  $\quad \operatorname{ctg}' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

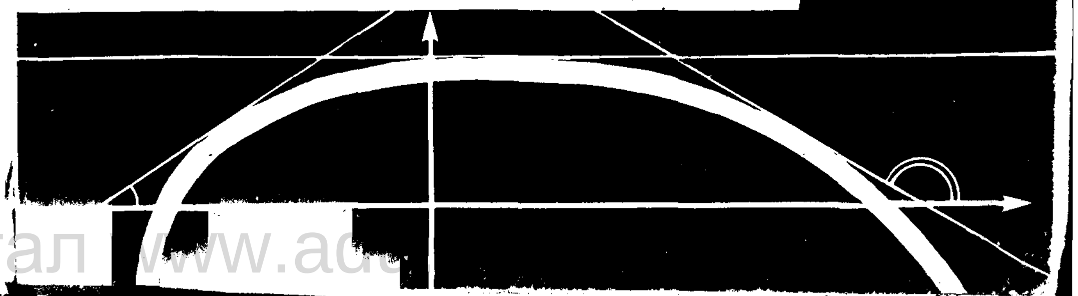
$(e^x)' = e^x$

$C' = 0$  $\quad (uv)' = u'v + uv'$

$(Cu)' = Cu'$  $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$  $\quad u'(kx) = ku'$





# АЛГЕБРА
# І ПАЧАТКІ АНАЛІЗУ

**ПАДРУЧНІК ДЛЯ 10 — 11 КЛАСАЎ СЯРЭДНЯЙ ШКОЛЫ**

Пад рэдакцыяй А. М. Калмагорава

*Зацверджаны Міністэрствам адукацыі Расійскай Федэрацыі*

*Рэкамендаваны Міністэрствам адукацыі Рэспублікі Беларусь*

Выданне чацвёртае



МІНСК «НАРОДНАЯ АСВЕТА» 1994

ў яго
ўжо
элена
ню і
онем
ными
воб-
ткі з

э па-
з) —
сябе
гэнні.
ў (у
рную
кова
пры
атко-
ыра-
і мі-
што
енты

мест
гуць
эму.
ным
нуе-
іных
ія ў
аць
юць
ысы,

оты,
паў-
кла-
ных

ББК 22.14я721
А 45
УДК 512(075.3)

Аўтары:
А. М. КАЛМАГОРАЎ, А. М. АБРАМАЎ, Ю. П. ДУДНІЦЫН,
Б. М. ІЎЛЕЎ, С. І. ШВАРЦБУРД

Падручнік удастоены прэміі на Усесаюзным конкурсе
падручнікаў для сярэдняй агульнаадукацыйнай школы

**Пераклад** зроблены па выданню: Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10—11-х кл. сред. шк./А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Просвещение, 1990.— 320 с.: ил.

Перакладчыкі:
В. У. АМБРАЖЭВІЧ, Г. І. БАНДАРЭНКА, В. М. ЗАХАРЭВІЧ, Я. З. ЛІФАНАЎ

**Алгебра** і пачаткі аналізу: Падруч. для 10—
А 45 11-х кл. сярэд. шк./А. М. Калмагораў, А. М. Абрамаў, Ю. П. Дудніцын і інш.; Пад рэд. А. М. Калмагорава.— 4-е выд.— Мн.: Нар. асвета, 1994.— 320 с.: іл.

ISBN 5-341-01280-1.

А $\frac{4306020503-214}{М303(03)-94}$ 143—94

ББК 22.14я721

ISBN 5-341-01280-1



## ПРАДМОВА

Вы пачынаеце вывучаць новы прадмет. Слова «алгебра» ў яго назве ўказвае на тое, што з некаторай часткай курса вы ўжо знаёмы. Як і ў папярэднія гады, значная ўвага будзе ўдзелена «літарнаму лічэнню» — пераўтварэнням выразаў, састаўленню і рашэнню ўраўненняў, няроўнасцей і іх сістэм. Разам з рашэннем ужо знаёмых задач, звязаных з мнагачленамі, рацыянальнымі дробамі, ступенямі і каранямі, вам трэба будзе расшырыць вобласць прымянення алгебры. Будуць уключаны новыя звесткі з трыганаметрыі, звесткі аб лагарыфмах і г. д.

Прынцыпова новая частка курса прысвечана вывучэнню пачаткаў аналізу. Матэматычны аналіз (або проста аналіз) — галіна матэматыкі, якая афармілася ў XVIII ст. і ўключае ў сябе дзве асноўныя часткі: дыферэнцыяльнае і інтэгральнае злічэнні. Аналіз з'явіўся дзякуючы намаганням многіх матэматыкаў (у першую чаргу І. Ньютана і Г. Лейбніца) і адыграў велізарную ролю ў развіцці прыродазнаўства — з'явіўся магутны, дастаткова універсальны метад даследавання функцый, якія з'яўляюцца пры рашэнні разнастайных прыкладных задач. Знаёмства з пачатковымі паняццямі і метадамі аналізу (вытворная, дыферэнцыраванне, першавобразная, інтэграл, метад пошуку максімумаў і мінімумаў функцый) — адна з важных мэт курса. Дададзім, што аналіз традыцыйна адносіцца да вышэйшай матэматыкі. Элементы аналізу ўвайшлі ў школьны курс параўнальна нядаўна.

Некалькі заўваг аб тым, як карыстацца падручнікам. Змест і прадметны паказальнік, змешчаныя ў канцы кнігі, дапамогуць вам хутка знайсці патрэбны раздзел, азначэнне або тэарэму. Адказы і ўказанні да практыкаванняў прыведзены ў адпаведным раздзеле. Для знаёмства з асноўнымі ідэямі рашэння прапануемых задач прыводзіцца мноства прыкладаў рашэння, вылучаных значкамі ○ і ●. Адзначым таксама, што задачы, уключаныя ў кожны пункт да гарызантальнай рысы, неабходна ўмець рашаць для атрымання здавальняючай адзнакі; гэтыя задачы задаюць абавязковы ўзровень падрыхтоўкі. Задачы, якія ідуць пасля рысы, больш складаныя.

Каб дапамагчы вам пры падрыхтоўцы да кантрольнай работы, у канцы кожнага раздзела прыведзены пытанні і задачы на паўтарэнне асноўнага матэрыялу. Адказы на гэтыя пытанні і прыклады рашэння такіх задач можна знайсці ў тэксце адпаведных пунктаў.

Аб паходжанні вывучаемых паняццяў, тэрмінаў і сімвалаў, аб людзях, што стварылі матэматычны аналіз, вы можаце даведацца, прачытаўшы «Звесткі з гісторыі», якія завяршаюць кожны з чатырох раздзелаў падручніка.

Дадатковы матэрыял тэарэтычнага характару змяшчаецца ў некаторых пунктах падручніка, ён вылучаны значкамі ▽ і ▲.

Практыкаванні для паўтарэння курса змешчаны ў заключным раздзеле «Задачы на паўтарэнне».

## АБАЗНАЧЭННІ, ЯКІЯ СУСТРАКАЮЦЦА Ў ВУЧЭБНЫМ ДАПАМОЖНІКУ

$\mathbf{N}$ — мноства ўсіх натуральных лікаў
$\mathbf{Z}$ — мноства ўсіх цэлых лікаў
$\mathbf{Z}_0$ — мноства ўсіх неадмоўных цэлых лікаў
$\mathbf{Q}$ — мноства ўсіх рацыянальных лікаў
$\mathbf{R}$ — мноства ўсіх сапраўдных лікаў, лікавая прамая
$[a;\ b]$ — замкнуты прамежак (адрэзак) з канцамі $a$ і $b$, $a<b$
$(a;\ b)$ — адкрыты прамежак (інтэрвал) з канцамі $a$ і $b$, $a<b$
$(a;\ b]$, $[a;\ b)$ — паўадкрытыя прамежкі з канцамі $a$ і $b$, $a<b$
$(a;\ \infty)$, $[a;\ \infty)$, $(-\infty;\ b)$, $(-\infty;\ b]$ — бесканечныя прамежкі
$(-\infty;\ \infty)$ — бесканечны прамежак, лікавая прамая
$\overline{a}$ — абазначэнне вектара
$(a-\delta;\ a+\delta)$ — $\delta$-наваколле пункта $a$
$[x]$ — цэлая частка ліку $x$
$\{x\}$ — дробавая частка ліку $x$
$|x|$ — модуль (абсалютная велічыня) ліку $x$
$f(x)$ — значэнне функцыі $f$ у пункце $x$
$D(f)$ — вобласць вызначэння функцыі $f$
$E(f)$ — вобласць значэнняў функцыі $f$
$\Delta x$ — прырашчэнне аргумента $x$
$\Delta f(x_0)$, $\Delta f$ — прырашчэнне функцыі $f$ у пункце $x_0$
$f'(x_0)$ — вытворная функцыі $f$ у пункце $x_0$
sin — функцыя сінус
cos — функцыя косінус
tg — функцыя тангенс
ctg — функцыя катангенс
$e$ — лік $e$, аснова паказальнай функцыі, для якой $(e^x)'=e^x$
$\log_a$ — лагарыфм з асновай $a$
lg — дзесятковы лагарыфм
ln — натуральны лагарыфм (лагарыфм з асновай $e$)
$\max\limits_{[a;\ b]} f$ — найбольшае значэнне функцыі $f$ на адрэзку $[a;\ b]$
$\min\limits_{[a;\ b]} f$ — найменшае значэнне функцыі $f$ на адрэзку $[a;\ b]$
$\int_a^b f(x)dx$ — інтэграл функцыі $f$ у межах ад $a$ да $b$
$\arcsin a$ — арксінус ліку $a$
$\arccos a$ — арккосінус ліку $a$
$\operatorname{arctg} a$ — арктангенс ліку $a$
$\operatorname{arcctg} a$ — арккатангенс ліку $a$



Вобласць вызначэння гэтых функцый — мноства ўсіх сапраўдных лікаў. Вобласцю значэнняў функцый сінус і косінус з'яўляецца адрэзак $[-1;\ 1]$, паколькі і ардынаты, і абсцысы пунктаў адзінкавай акружнасці прымаюць усе значэнні ад $-1$ да $1$. Будзем абазначаць вобласць вызначэння функцыі $f$ праз $D(f)$, а вобласць значэнняў — праз $E(f)$. Тады можна запісаць:

$$D(\sin)=D(\cos)=\mathbf{R};\ E(\sin)=E(\cos)=[-1;\ 1].$$

Напомнім наступныя вядомыя вам уласцівасці функцый сінус і косінус.

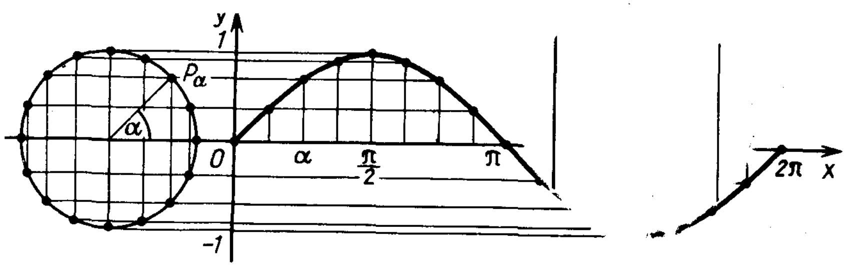
*Для любога $x$ справядлівыя роўнасці:*

1) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$;

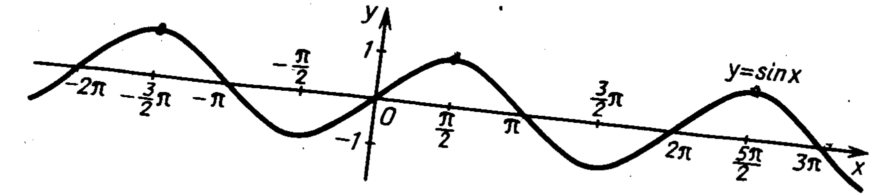
2) $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$ ($n$ — адвольны цэлы лік).

**2. Сінусоіда.** Пабудуем графік функцыі сінус на адрэзку $[0;\ 2\pi]$. Для гэтага адзначым на восі ардынат пункты $(0;\ -1)$ і $(0;\ 1)$, а на восі абсцыс пункт з абсцысай $2\pi$ (звярніце ўвагу: даўжыня адрэзка $[0;\ 2\pi]$ прыблізна роўна 6,28). Падзелім адрэзак $[0;\ 2\pi]$ і адзінкавую акружнасць на 16 роўных частак (рыс. 7). Для пабудавання пункта графіка з абсцысай $\alpha$ выкарыстаем азначэнне сінуса: адзначым пункт $P_\alpha$ на адзінкавай акружнасці і правядзём праз $P_\alpha$ прамую, паралельную восі абсцыс (гл. рыс. 7). Пункт перасячэння гэтай прамой і прамой $x=\alpha$ шукаемы, паколькі яго ардыната супадае з ардынатай пункта $P_\alpha$, а па азначэнню $\sin\alpha$ роўны ардынаце $P_\alpha$.

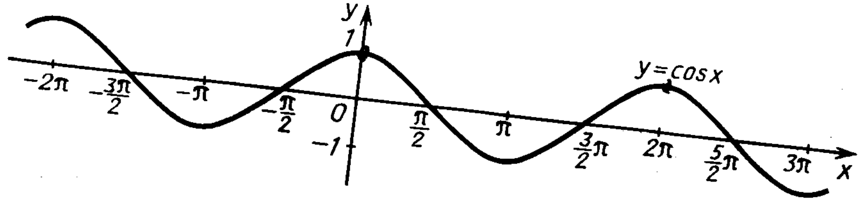
На рысунку 7 паказана пабудаванне 16 пунктаў графіка. Злучаючы іх плаўнай крывой, атрымліваем эскіз графіка сінуса на адрэзку $[0;\ 2\pi]$. Для пабудавання графіка сінуса па-за гэтым адрэзкам заўважым, што $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ ($n$ — адвольны цэлы лік). Таму ва ўсіх пунктах выгляду $x_0+2\pi n$, дзе $0\leqslant x_0\leqslant 2\pi$, значэнні сінуса супадаюць, і, значыць, графік сінуса на ўсёй прамой атрымліваецца з пабудаванага графіка пры дапамозе паралельных пераносаў яго ўздоўж восі $Ox$ (управа і ўлева) на $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$ і г. д. (рыс. 8). Графік сінуса называецца *сінусоідай*. Адрэзак $[-1;\ 1]$ восі ардынат, пры дапамозе якога мы знаходзілі значэнні сінуса, часам называюць *лініяй сінусаў*.




Рыс. 7




Рыс. 8




Рыс. 9

Для пабудавання графіка косінуса напомнім, што $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Значыць, значэнне косінуса ў адвольным пункце $x_0$ роўна значэнню сінуса ў пункце $x_0+\frac{\pi}{2}$. Гэта азначае, што графік косінуса атрымліваецца з графіка сінуса пры дапамозе паралельнага пераносу на адлегласць $\frac{\pi}{2}$ у адмоўным напрамку восі $Ox$. Таму графік функцыі $y=\cos x$ (рыс. 9) таксама з'яўляецца сінусоідай.

### 3. Функцыі тангенс і катангенс і іх графікі.

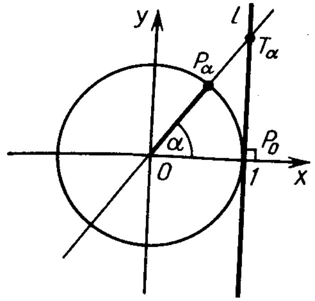
Азначэнне. **Лікавыя функцыі, зададзеныя формуламі $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$, называюць адпаведна *тангенсам* і *катангенсам*** (і абазначаюць tg і ctg).

Вобласцю вызначэння функцыі тангенс з'яўляецца мноства ўсіх лікаў $x$, для якіх $\cos x \neq 0$, г. зн. усе лікі $x$, не роўныя $\frac{\pi}{2}+\pi n$ ($n$ «пр... ае» ўсё мноства цэлых лікаў $Z$). Вобласць вызначэн... $\neq 0$, г. ... складаецца з усіх лікаў $x$, для якіх $\sin x \neq$ ... не роўных $\pi n$, дзе $n \in Z$.

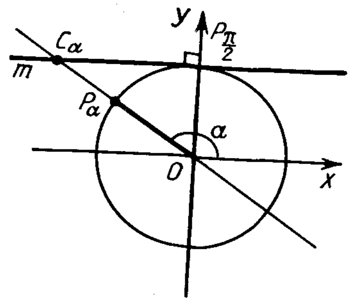
Пра... (рыс. 1... $l$ да адзінкавай акружнасці ў пункце $P_0$ ... пункт $P_\alpha$ ... адвольны лік, для якога $\cos\alpha \neq 0$. Тады ... мая $OP_\alpha$ ... ляжыць на восі ардынат, і, значыць, пра... некаторым пункце $T_\alpha$ з абсцысай 1. Знойдзем ардынату гэтага пункта.

Для гэтага заўважым, што прамая $OP_\alpha$ праходзіць праз пункты $O(0;\ 0)$ і $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Таму яна мае ўраўненне $y = x \operatorname{tg}\alpha$. Абсцыса пункта $T_\alpha$, які ляжыць на гэтай прамой, роўна 1. З ураўнення прамой $OP_\alpha$ знаходзім, што ардыната пункта $T_\alpha$ роўна $\operatorname{tg}\alpha$. Такім чынам, ардыната пункта перасячэння прамых $OP_\alpha$ і $l$ роўна тангенсу $\alpha$. Таму прамую $l$ і называюць *лініяй тангенсаў*.



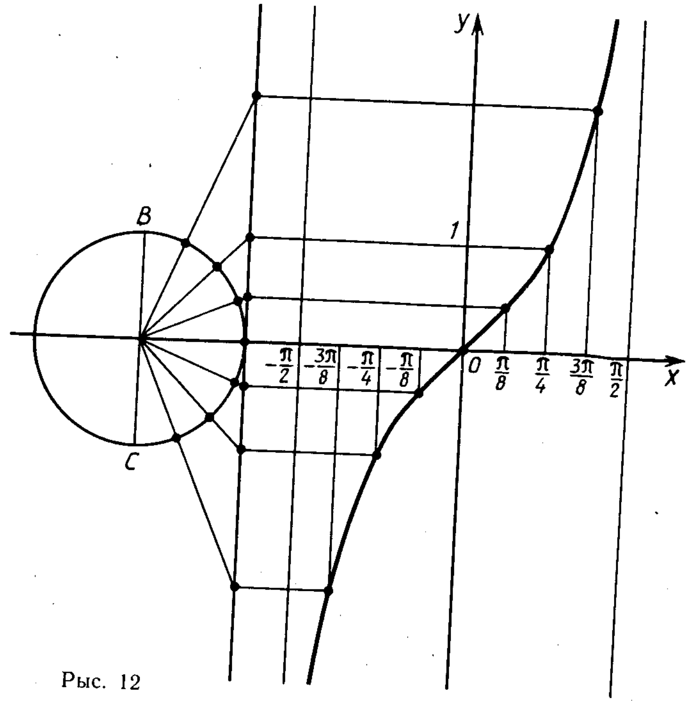



Рыс. 10

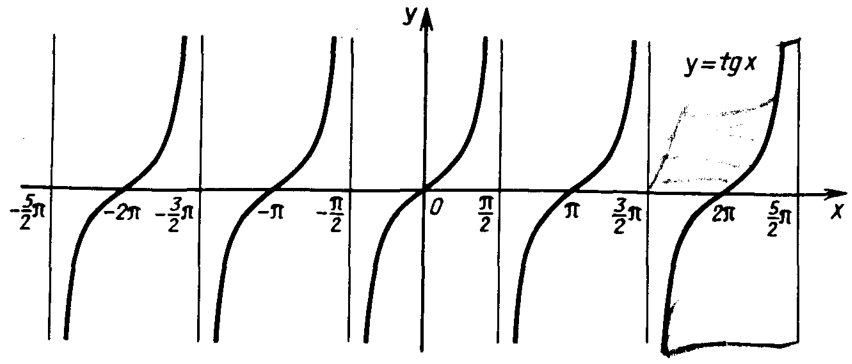



Рыс. 11

Няцяжка таксама даказаць, што абсцыса пункта $C_\alpha$ перасячэння прамой $OP_\alpha$ з датычнай $m$ да адзінкавай акружнасці, праведзенай праз пункт $P_{\frac{\pi}{2}}$ (рыс. 11), роўна $\operatorname{ctg}\alpha$ пры $\sin\alpha \neq 0$. Таму прамую $m$ называюць *лініяй катангенсаў*.




Рыс. 12



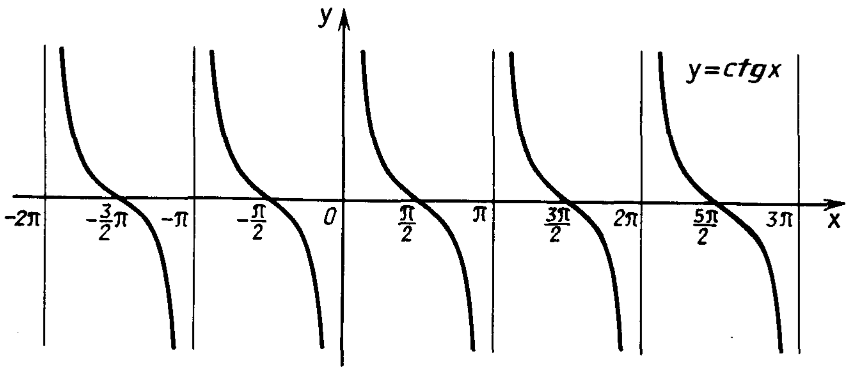

Рыс. 13

Вобласць значэнняў тангенса (катангенса) — уся лікавая прамая. Дакажам гэта для функцыі tg. Няхай $y_0$ — адвольны сапраўдны лік. Разгледзім пункт $T(1; y_0)$. Як толькі што было паказана, тангенс вугла $TOx$ роўны $y_0$. Значыць, функцыя tg прымае любое сапраўднае значэнне $y_0$, што і патрабавалася даказаць.

Напомнім наступныя вядомыя вам уласцівасці функцыі tg і ctg:

1) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
2) $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$; $n \in \mathbf{Z}$.

Пабудаванне графіка тангенса на інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рыс. 12) аналагічна пабудаванню, апісанаму ў выпадку сінуса. (Значэнне функцыі tg у пункце знаходзіцца пры дапамозе лініі тангенсаў.) З прычыны тоеснасці $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ ($n \in \mathbf{Z}$) графік тангенса на ўсёй вобласці вызначэння (рыс. 13) атрымліваецца з графіка на інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ паралельнымі пераносамі




Рыс. 14



ўздоўж восі $Ox$ (управа і ўлева) на $\pi$, $2\pi$ і г. д. Графік функцыі tg называюць *тангенсоідай.*

Графік катангенса прыведзены на рысунку 14.

Сінус, косінус, тангенс і катангенс часта называюць *асноўнымі трыганаметрычнымі функцыямі.* Часам разглядаюць яшчэ дзве асноўныя трыганаметрычныя функцыі — *секанс* і *касеканс* (абазначаюцца адпаведна sec і cosec).

Для таго каб зразумець, чаму асноўных трыганаметрычных функцый іменна 6, заўважым, што трыганаметрычныя функцыі вострага вугла $\alpha$ можна вызначыць як адносіны старон прамавугольнага трохвугольніка з вострым вуглом $\alpha$ (гл. рыс. 3). Такіх адносін 6:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

### *Практыкаванні*

**28.** Адзначце на адзінкавай акружнасці пункт $P_\alpha$, калі:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;   б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; г) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; $\alpha = 2\pi$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

**29.** Знайдзіце каардынаты пункта $P_\alpha$ адзінкавай акружнасці, калі $\alpha$ роўна:

а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\pi$;   б) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$;

в) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $3\pi$;   г) $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$.

**30.** У якой чвэрці каардынатнай плоскасці размешчаны пункт $P_\alpha$, калі $\alpha$ роўна:

а) $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{8\pi}{7}$, $-2{,}7$;   б) $\frac{5\pi}{3}$, $1{,}8\pi$, $-3{,}2$;

в) $\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $1{,}9$;   г) $\frac{5\pi}{9}$, $-2{,}3\pi$, $3{,}7$?

**31.** Знайдзіце знак ліку:

а) $\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{8}\operatorname{tg}2{,}3\pi$;   б) $\sin 1 \cos 3 \operatorname{ctg} 5$;

в) $\sin 1{,}3\pi \cos\frac{7\pi}{9}\operatorname{tg}2{,}9$;   г) $\sin 8 \cos 0{,}7 \operatorname{tg} 6{,}4$.

**32.** Знайдзіце значэнні сінуса і косінуса $\alpha$, калі $\alpha$ роўна:

а) $4\pi$, $-\pi$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $-5{,}5\pi$; в) $\pi$, $-2\pi$; г) $\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$.

**33.** Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$; б) $y=-\sin(x+\pi)$;

в) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; г) $y=\operatorname{tg}(x+\pi)$.

**34.** На адзінкавай акружнасці адзначце пункт $P_\alpha(x;\ y)$, каардынаты якога задавальняюць умове:

а) $y=0{,}5,\ x>0$; б) $x=-\frac{1}{2},\ y>0$;

в) $x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ y>0$; г) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x<0$.

**35.** На міліметровай паперы пабудуйце адзінкавую акружнасць, а затым цэнтральны вугал $\alpha$, такі, што:

а) $\sin\alpha=-0{,}5$; б) $\cos\alpha=0{,}3$;
в) $\cos\alpha=-0{,}4$; г) $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Знайдзіце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў дадзенай функцыі. Пабудуйце яе графік (36—37).

**36.** а) $y=2+\sin x$; б) $y=1+\operatorname{tg} x$;
в) $y=\cos x-1$; г) $y=3+\sin x$.

**37.** а) $y=2\sin x$; б) $y=-\frac{1}{2}\cos x$;
в) $y=0{,}5\operatorname{tg} x$; г) $y=-1{,}5\sin x$.

Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння з восямі каардынат графіка функцыі (38—39).

**38.** а) $y=\sin x$; б) $y=1+\cos x$;
в) $y=\cos x$; г) $y=\sin x-1$.

**39.** а) $y=x^2-3x$; б) $y=\sin x-1{,}5$;
в) $y=2{,}5+\cos x$; г) $y=\frac{1}{x}+1$.

## § 2. АСНОЎНЫЯ ЎЛАСЦІВАСЦІ ФУНКЦЫЙ

### 3. Функцыі і іх графікі

**1. Лікавая функцыя.** З паняццем функцыі вы пазнаёміліся ў курсе алгебры. Пры вывучэнні пачаткаў аналізу зручна прыняць наступнае азначэнне:

Азначэнне. ***Лікавай функцыяй* з вобласцю вызначэння *D* называецца адпаведнасць, пры якой кожнаму ліку *x* з мноства *D* супастаўляецца па некатораму правілу лік *y*, які залежыць ад *x*.**



Функцыі звычайна абазначаюць лацінскімі (а часам грэчаскімі) літарамі. Разгледзім адвольную функцыю $f$. Незалежную пераменную $x$ называюць таксама *аргументам функцыі*. Лік $y$, які адпавядае ліку $x$, называюць *значэннем функцыі* $f$ у пункце $x$ і абазначаюць $f(x)$. Вобласць вызначэння функцыі $f$ абазначаюць $D(f)$. Мноства, якое складаецца з усіх лікаў $f(x)$, такіх, што $x$ належыць вобласці вызначэння функцыі $f$, называюць *вобласцю значэнняў функцыі* $f$ і абазначаюць $E(f)$.

Часцей за ўсё функцыю задаюць пры дапамозе якой-небудзь формулы. Пры гэтым калі не дадзена дадатковых абмежаванняў, то вобласцю вызначэння функцыі, зададзенай формулай, лічаць мноства ўсіх значэнняў пераменнай, пры якіх гэта формула мае сэнс. Напрыклад, формула $f(x)=\frac{1}{x}$ мае сэнс пры ўсіх $x\neq0$, таму вобласцю вызначэння функцыі $f(x)=\frac{1}{x}$ лічаць мноства ўсіх не роўных нулю сапраўдных лікаў. Вобласць яе значэнняў супадае з вобласцю вызначэння і з'яўляецца аб'яднаннем інтэрвалаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$.

Наогул, *аб'яднаннем мностваў* $A$ і $B$ называецца мноства, якое складаецца з усіх элементаў, якія належаць хаця б аднаму з мностваў $A$ ці $B$. Аб'яднанне мностваў $A$ і $B$ абазначаецца так: $A\cup B$. Напрыклад, аб'яднаннем адрэзкаў $[0;\ 2]$ і $[1;\ 3]$ з'яўляецца адрэзак $[0;\ 3]$.

Сімвалам $\cup$ зручна карыстацца для абазначэння лікавых мностваў, якія можна запісаць у выглядзе аб'яднання лікавых прамежкаў. Так, для функцыі $f(x)=\frac{1}{x}$

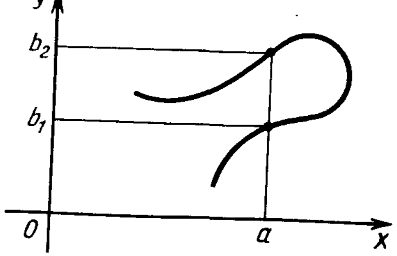
$$D(f)=E(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ \infty).$$

Вобласць вызначэння функцыі $y=\operatorname{tg} x$ — аб'яднанне ўсіх інтэрвалаў віду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, дзе $n\in\mathbf{Z}$; вобласць яе значэнняў — уся лікавая прамая, г. зн. $E(\operatorname{tg})=(-\infty;\ \infty)$.

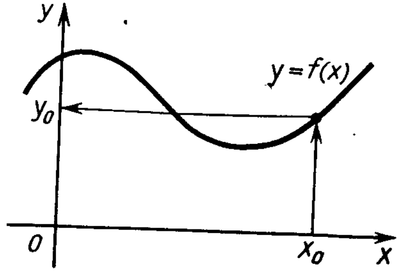
Функцыі віду $f(x)=p(x)$, дзе $p(x)$ — мнагачлен, называюць *цэлымі рацыянальнымі функцыямі*, а функцыі віду $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, дзе $p$ і $q$ — мнагачлены, называюць *дробава-рацыянальнымі функцыямі*. Дзель $\frac{p(x)}{q(x)}$ вызначана, калі $q(x)$ не ператвараецца ў нуль. Таму вобласць вызначэння дробава-рацыянальнай функцыі $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ — мноства ўсіх сапраўдных лікаў, з якога выключаны карані мнагачлена $q(x)$.

Прыклад 1. Знойдзем вобласць вызначэння дробава-рацыянальнай функцыі

$$f(x)=\frac{7x^8-5x^6+3x^2-4x}{x^3-3x^2+2x}.$$




Рыс. 15




Рыс. 16

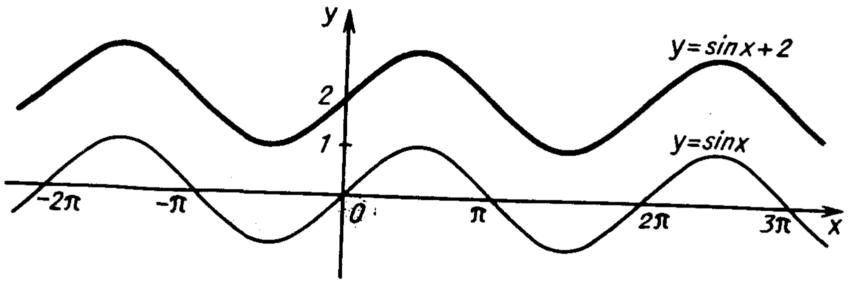
Карані мнагачлена $x^3 - 3x^2 + 2x$ — лікі 0, 1 і 2. Таму $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup (2;\ \infty)$.

**2. Графік функцыі.** *Графікам функцыі* $f$ называюць мноства ўсіх пунктаў $(x;\ y)$ каардынатнай плоскасці, дзе $y = f(x)$, а $x$ «прабягае» ўсю вобласць вызначэння функцыі $f$.

Падмноства каардынатнай плоскасці з'яўляецца графікам якой-небудзь функцыі, калі яно мае не больш за адзін агульны пункт з любой прамой, паралельнай восі $Oy$. Напрыклад, мноства, паказанае на рысунку 15, не з'яўляецца графікам функцыі, паколькі яно змяшчае два пункты з адной і той жа абсцысай $a$, але рознымі ардынатамі $b_1$ і $b_2$. Калі б мы палічылі гэта мноства графікам функцыі, то прыйшлося б лічыць, што гэта функцыя мае пры $x = a$ адразу два значэнні: $b_1$ і $b_2$, што супярэчыць азначэнню функцыі.

Часта функцыю задаюць графічна. Пры гэтым для любога $x_0$ з вобласці вызначэння лёгка знайсці адпаведнае значэнне $y_0 = f(x_0)$ функцыі (рыс. 16).

**3. Пераўтварэнні графікаў.** Запас функцый, графікі якіх вы ўмееце будаваць, пакуль невялікі — гэта функцыі $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Пакажам, што, прымяняючы вядомыя з курса геаметрыі звесткі аб пераўтварэннях фігур, гэты спіс можна істотна пашырыць.

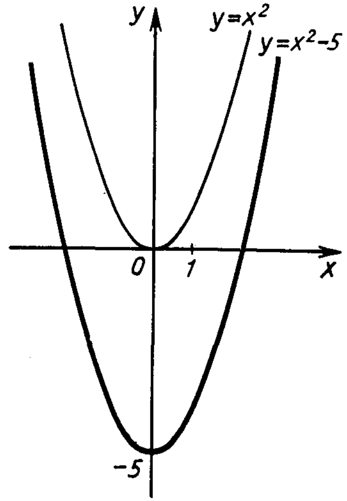



Рыс. 17



1) Разгледзім спачатку *паралельны перанос на вектар* $(0;\ b)$ *уздоўж восі ардынат*. Абазначаючы тут і далей праз $(x';\ y')$ каардынаты пункта, у які пераходзіць адвольны пункт $(x;\ y)$ плоскасці пры дадзеным пераўтварэнні, атрымаем вядомыя вам формулы

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (1)$$




Рыс. 18

Няхай $f$ — адвольная функцыя з вобласцю вызначэння $D(f)$. Высветлім, у якую фігуру пераходзіць графік гэтай функцыі пры дадзеным пераносе. З формул (1) адразу атрымліваем, што адвольны пункт $(x;\ f(x))$ графіка пераходзіць у пункт $(x;\ f(x) + b)$. Гэта азначае, што графік $f$ пераходзіць у фігуру, якая складаецца з усіх пунктаў $(x;\ f(x) + b)$, дзе $x \in D(f)$.

Па азначэнню графіка функцыі гэта фігура з'яўляецца графікам функцыі $y = f(x) + b$. Сказанае дазваляе сфармуляваць правіла:

*Для пабудавання графіка функцыі $f(x) + b$, дзе $b$ — пастаянны лік, трэба перанесці графік $f$ на вектар $(0;\ b)$ уздоўж восі ардынат.*

Прыклад 2. Пабудуем графікі функцый: а) $y = \sin x + 2$, б) $y = x^2 - 5$.

а) У адпаведнасці з правілам пераносім графік функцыі $y = \sin x$ на вектар $(0;\ 2)$, г. зн. уверх па восі $Oy$ на 2 адзінкі (рыс. 17).

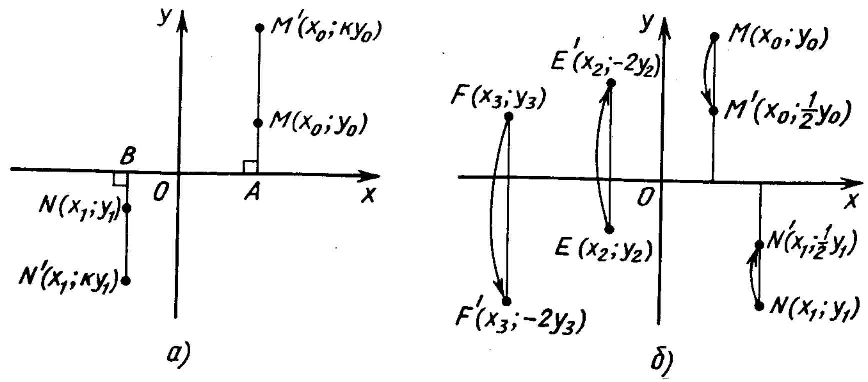
б) Пабудаванне ажыццяўляецца пераносам парабалы $y = x^2$ на вектар $(0;\ -5)$, г. зн. уніз па восі $Oy$ (рыс. 18).

2) Новым для вас пераўтварэннем з'яўляецца *расцяжэнне ўздоўж восі $Oy$ з каэфіцыентам $k$*, якое задаецца формуламі

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \qquad (2)$$

Для пабудавання пункта $M'$, у які пераходзіць дадзены пункт $M$ пры расцяжэнні, трэба пабудаваць на прамой $AM$, дзе $A$ — праекцыя $M$ на вось $Ox$ (рыс. 19, *а*), пункт, гаматэтычны $M$ адносна цэнтра $A$ (каэфіцыент гаматэтыі роўны каэфіцыенту $k$ расцяжэння). На рысунку 19, *б* паказана пабудаванне пунктаў, у якія пераходзяць даныя пры расцяжэннях з каэфіцыентамі $\frac{1}{2}$ і $-2$.

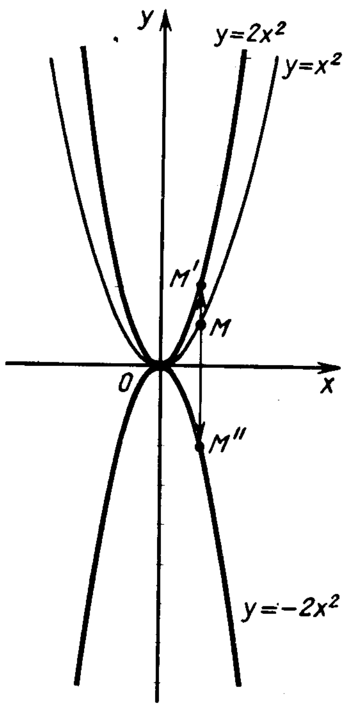
Высветлім, у якую фігуру пераходзіць графік функцыі $f$ пры расцяжэнні. З формул (2) адразу атрымліваем, што адвольны




Рыс. 19

пункт $(x; f(x))$ графіка $f$ пераходзіць у пункт $(x; kf(x))$. Адсюль вынікае, што графік $f$ пераходзіць у фігуру, якая складаецца з усіх пунктаў $(x; kf(x))$, дзе $x \in D(f)$. Гэта фігура з'яўляецца графікам функцыі $y = kf(x)$. Даказана наступнае правіла:

*Для пабудавання графіка функцыі $y = kf(x)$ трэба расцягнуць графік функцыі $y = f(x)$ у $k$ разоў уздоўж восі ардынат.*




Рыс. 20

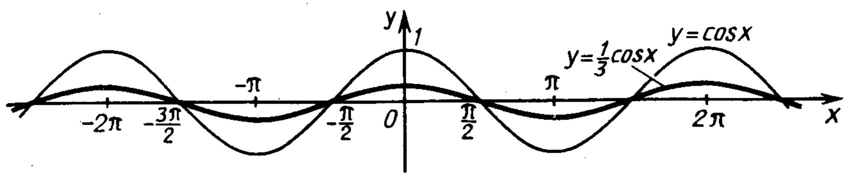
Прыклад 3. Пабудуем графікі функцый $y = -2x^2$ і $y = \frac{1}{3}\cos x$.

Пабудаванне ажыццяўляецца ў першым выпадку з графіка функцыі $y = x^2$ (рыс. 20), а ў другім выпадку спачатку будуем графік функцыі $y = \cos x$, затым выкарыстаем расцяжэнне ўздоўж восі ардынат з каэфіцыентам $\frac{1}{3}$ (рыс. 21).

Заўвага. Калі $0 < |k| < 1$, то расцяжэнне з каэфіцыентам $k$ часта называюць *сцісканнем*. Напрыклад, расцяжэнне з каэфіцыентам $\frac{1}{2}$ называюць сцісканнем у 2 разы. Адзначым таксама, што калі $k < 0$, то для пабудавання графіка функцыі $y = kf(x)$ трэба спачатку расцягнуць графік $f$ у $|k|$ разоў, а затым адлюстраваць яго сіметрычна адносна восі абсцыс (гл. рыс. 20).

3) *Паралельны перанос уздоўж восі абсцыс на вектар* $(a; 0)$ задаецца формуламі






Рыс. 21

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (3)$$

Кожны пункт графіка функцыі $f$ пераходзіць згодна з формуламі (3) у пункт $(x + a; f(x))$. Таму пры дапамозе пераменных $x'$, $y'$ можна запісаць, што графік $f$ пераходзіць у фігуру Ф, якая складаецца з пунктаў $(x', f(x' - a))$, дзе $x'$ прымае ўсе значэнні віду $x + a$($x$ «прабягае» $D(f)$).

Іменна пры гэтых значэннях $x'$ лік $x' - a$ належыць $D(f)$ і $f(x' - a)$ вызначана. Значыць, фігура Ф ёсць графік функцыі $y = f(x - a)$. Такім чынам, можна зрабіць вывад:

*Графік функцыі $y = f(x - a)$ атрымліваецца з графіка $f$ пераносам (уздоўж восі абсцыс) на вектар* $(a; 0)$.

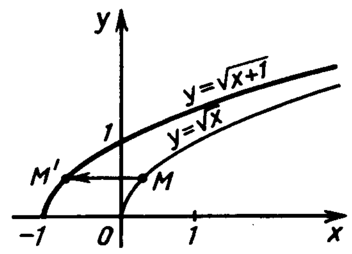
Звярніце ўвагу: калі $a > 0$, то вектар $(a; 0)$ накіраваны ў дадатным напрамку восі абсцыс, а пры $a < 0$ — у адмоўным.

Прыклад 4. Пабудаванне графікаў функцый $y = \sqrt{x + 1}$ і $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ паказана на рысунках 22 і 23.

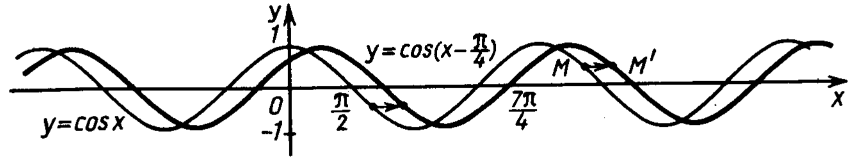
4) *Расцяжэнне ўздоўж восі $Ox$ з каэфіцыентам $k$ задаецца формуламі*

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (4)$$

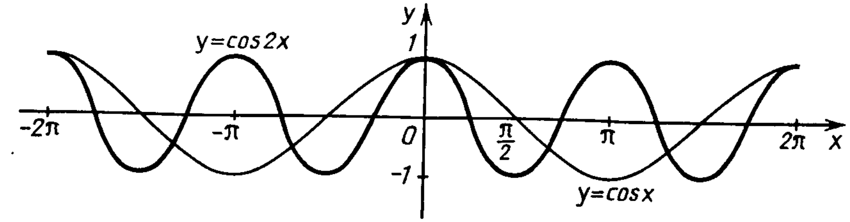
Адвольны пункт графіка функцыі $f$ пераходзіць пры такім расцяжэнні ў пункт $(kx; f(x))$. Пераходзячы да пераменных $x'$, $y'$, можна запісаць, што графік $y = f(x)$ пераходзіць у фігуру, якая складаецца з пунктаў $\left(x'; f\left(\frac{x'}{k}\right)\right)$, дзе $x'$ прымае ўсе значэнні віду $x' = kx$, а $x \in D(f)$.



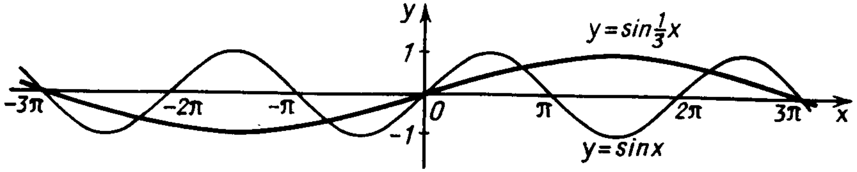

Рыс. 22




Рыс. 23




Рыс. 24




Рыс. 25

Гэта фігура ёсць графік функцыі $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$. Такім чынам:

*Для пабудавання графіка функцыі $y=f\left(\frac{x}{k}\right)$ трэба падвергнуць графік функцыі $f$ расцяжэнню з каэфіцыентам $k$ уздоўж восі абсцыс.*

○ Прыклад 5. Пабудаванне графікаў функцыі $y=\cos 2x$ і $y=\sin\frac{1}{3}x$ паказана на рысунках 24 і 25.

▽ **4. Адвабражанне.** Функцыю з вобласцю вызначэння $D$ і вобласцю значэнняў $E$ называюць таксама *адвабражаннем мноства $D$ на мноства $E$.* Можна сказаць, напрыклад, што формула $y=\sin x$ задае адвабражанне мноства $\mathbf{R}$ сапраўдных лікаў на адрэзак $[-1;\ 1]$. Словы «функцыя» і «адвабражанне» — сінонімы.

Нярэдка разглядаюць функцыі (адвабражанні), вобласць вызначэння або вобласць значэнняў якіх (а магчыма, і абодва гэтыя мноствы) не з'яўляюцца лікавымі мноствамі. З такімі прыкладамі, па сутнасці, вы ўжо сустракаліся ў курсе геаметрыі. Напрыклад, вобласцю вызначэння функцыі «Плошча многавугольніка» пры фіксаванай адзінцы вымярэння плошчаў з'яўляецца мноства многавугольнікаў плоскасці. Вобласць значэнняў гэтай функцыі — мноства неадмоўных лікаў (плошчу 0 маюць «выраджаныя» многавугольнікі, напрыклад адрэзак).

Рух (гэтак жа як і пераўтварэнне падобнасці), які пераводзіць фігуру $F$ у фігуру $F'$, таксама з'яўляецца адвабражаннем, яго вобласць вызначэння $F$ і вобласць значэнняў $F'$ складаюцца з пунктаў.

Паняцце адвабражання часта адносяць да ліку асноўных паняццяў усёй матэматыкі. З яго дапамогай можна даць такое азначэнне функцыі: функцыяй з вобласцю вызначэння $D$ і вобласцю значэнняў $E$ называецца адвабражанне мноства $D$ на мноства $E$, пры якім кожнаму элементу мноства $D$ адпавядае адзін зусім пэўны элемент мноства $E$ і кожны элемент мноства $E$ пастаўлены ў адпаведнасць некатораму (хаця б аднаму) элементу мноства $D$.



### *Практыкаванні*

**40.** Знайдзіце значэнні функцыі:

а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ у пунктах $-1,\ \frac{1}{2},\ 10$;

б) $f(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ у пунктах $-\frac{\pi}{4},\ 0,\ \pi$;

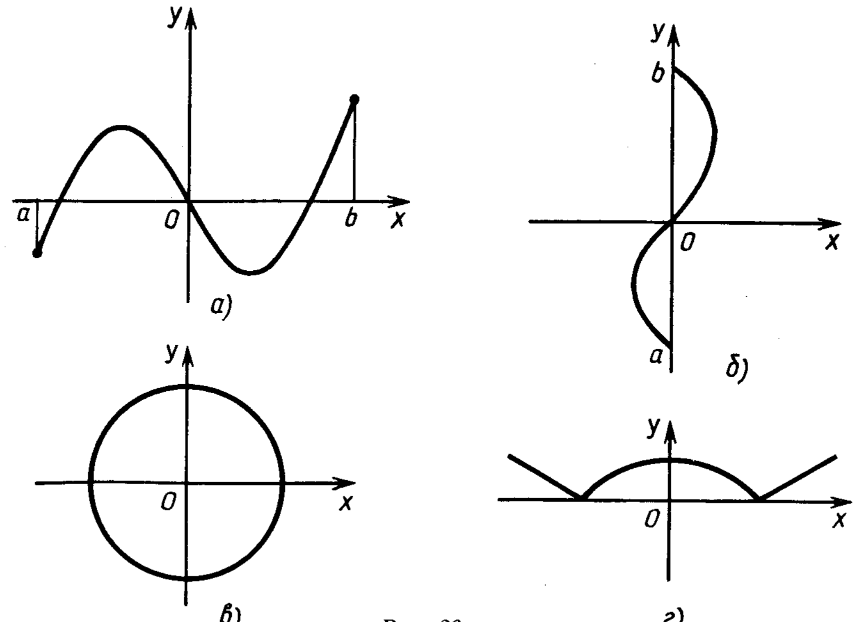
в) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$ у пунктах $0,\ 1,\ 2$;

г) $f(x)=2-\sin 2x$ у пунктах $-\frac{\pi}{4},\ 0,\ \frac{5\pi}{12}$.

**41.** Запішыце значэнні функцыі:

а) $f(x)=x^2+2x$ у пунктах $x_0,\ t+1$;
б) $f(x)=\operatorname{tg} 2x$ у пунктах $a,\ b-1$;
в) $f(x)=\frac{1}{x}+1$ у пунктах $x_0,\ a+2$;
г) $f(x)=2\cos\frac{x}{3}$ у пунктах $z,\ h+\pi$.

**42.** Ці з'яўляецца графікам функцыі фігура, паказаная на рысунку 26, *а — г*?




Рыс. 26

Знайдзіце вобласць вызначэння кожнай з функцый (43—44).

**43.** а) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$;

в) $f(x)=\frac{5-x^2}{x^2+2x-8}$; г) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$.

**44.** а) $f(x)=\frac{1}{x^3}$; б) $f(x)=2\,\mathrm{tg}\,x$;

в) $f(x)=1+\mathrm{ctg}\,x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

**45.** Знайдзіце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў кожнай з функцый:

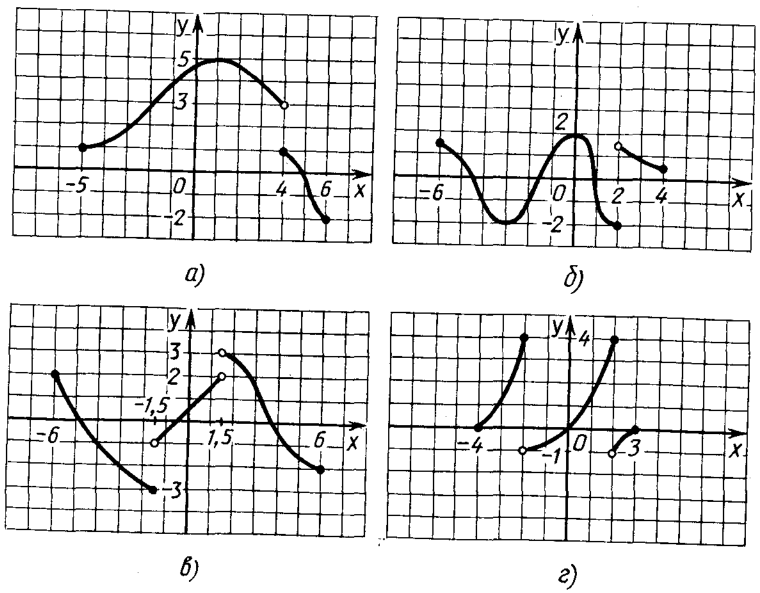
а) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=2+\frac{4}{x-3}$;

в) $y=\frac{3}{x+1}-1$; г) $y=3+0{,}5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

**46.** Знайдзіце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў функцыі, графік якой паказаны на рысунку 27, *а — г*.

**47.** Начарціце графік якой-небудзь функцыі $f$, для якой:

а) $D(f)=[-2;\ 4]$, $E(f)=[-3;\ 3]$;
б) $D(f)=(-5;\ 3)$, $E(f)=[2;\ 6]$;
в) $D(f)=(0;\ 7)$, $E(f)=[-1;\ 6]$;
г) $D(f)=[-4;\ 0]$, $E(f)=(1;\ 4)$.




Рыс. 27



**48.** У адной і той жа сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

а) $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}+2$, $y=\frac{1}{x-2}$;

б) $y=\cos x$, $y=\cos x-3$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y=-x^2$, $y=4-x^2$, $y=-(x-2)^2$;

г) $y=\sin x$, $y=\sin x+2$, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Пабудуйце графікі функцый (49—50).

**49.** а) $y=\frac{1}{x-3}$; б) $y=(x-2)^2-4$;

в) $y=1-(x+2)^2$; г) $y=2+\frac{1}{x}$.

**50.** а) $y=1+2\sin x$; б) $y=\sqrt{x+1}-1$;

в) $y=0{,}5\cos x-1$; г) $y=2+\sqrt{x-1}$.

---

**51.** Знайдзіце значэнні функцыі:

а) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ калі } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ калі } x<0, \end{cases}$ у пунктах $-2;\ -\frac{1}{3};\ 0;\ 5$;

б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, \text{ калі } x\geqslant -1, \\ 1-x, \text{ калі } x<-1, \end{cases}$ у пунктах $-2;\ -1;\ 0;\ 4$;

в) $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{ калі } x>0, \\ \cos x-1, \text{ калі } x\leqslant 0, \end{cases}$ у пунктах $-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{3};\ 0;\ \frac{\pi}{6}$;

г) $f(x)=\begin{cases} 1, \text{ калі } x>0, \\ 0, \text{ калі } x=0, \\ -1, \text{ калі } x<0. \end{cases}$ у пунктах $-1{,}7;\ -\sqrt{2};\ 0;\ 3{,}8$.

**52.** а) Аснова $AC$ трохвугольніка $ABC$ роўна $b$, вышыня $BD$ роўна $h$. Праз пункт $K$ вышыні $BD$ праведзена прамая, паралельная $AC$. Выразіце плошчы фігур, на якія дзеліць гэта прамая дадзены трохвугольнік, як функцыі ад адлегласці $BK=x$.

б) Радыянная мера цэнтральнага вугла роўна $x$, радыус круга роўны $R$. Выразіце плошчу адпаведнага сегмента як функцыю ад $x$.

в) Радыянная мера цэнтральнага вугла сектара роўна $\alpha$, радыус роўны $r$. Выразіце перыметр сектара як функцыю ад вугла $\alpha$.

г) Прамая, паралельная дыяганалі квадрата, дзеліць яго на дзве фігуры. Задайце формулай залежнасць паміж плошчай кожнай фігуры і даўжынёй $x$ меншага адрэзка, які

адсякае дадзеная прамая ад дыяганалі, калі старана квадрата роўна $a$.

**53.** Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $y=\frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$;  б) $y=\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{16-x^2}$;

в) $y=\frac{\sqrt{x+2}}{3-2x}$;  г) $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-2x}$.

**54.** Знайдзіце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў функцыі:

а) $y=1+\sin^2 x$;  б) $y=\frac{x-1}{x}$;

в) $y=\sqrt{x^2+4}$;  г) $y=1{,}5-0{,}5\cos^2 x$.

Пабудуйце графікі функцый (55—56).

**55.** а) $y=|x-1|$;  б) $y=\begin{cases}x^2-4, & \text{калі } x\geqslant 2,\\ 2-x, & \text{калі } x<2;\end{cases}$

в) $y=\sqrt{2x-2}$;  г) $y=\begin{cases}3-x^2, & \text{калі } x>1,\\ x-2, & \text{калі } x\leqslant 1.\end{cases}$

**56.** а) $y=\sin 3x-1$;  б) $y=\frac{1}{2}x^3+2$;

в) $y=1+\cos 2x$;  г) $y=1+\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

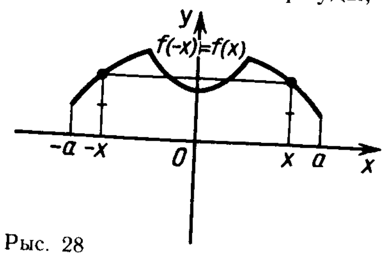
## 4. Цотныя і няцотныя функцыі. Перыядычнасць трыганаметрычных функцый

**1. Цотныя і няцотныя функцыі.** Разгледзім функцыі, вобласці вызначэння якіх сіметрычныя адносна пачатку каардынат, г. зн. для любога $x$ з вобласці вызначэння лік $(-x)$ таксама належыць вобласці вызначэння. Сярод такіх функцый вылучаюць цотныя і няцотныя.

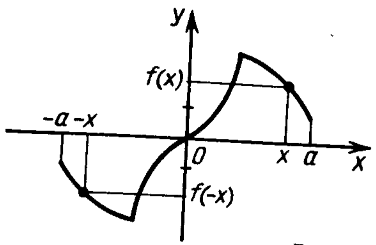
А з н а ч э н н е. **Функцыя $f$ называецца *цотнай*, калі для любога $x$ з яе вобласці вызначэння $f(-x)=f(x)$** (рыс. 28).

А з н а ч э н н е. **Функцыя $f$ *няцотная*, калі для любога $x$ з яе вобласці вызначэння $f(-x)=-f(x)$** (рыс. 29).

П р ы к л а д 1. Функцыя $f(x)=x^4$ цотная, а функцыя $g(x)=x^3$ няцотная. Сапраўды, вобласць вызначэння кожнай з іх

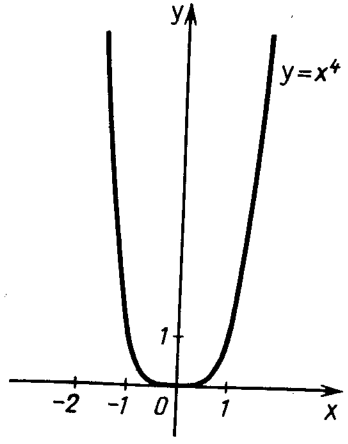



Рыс. 28

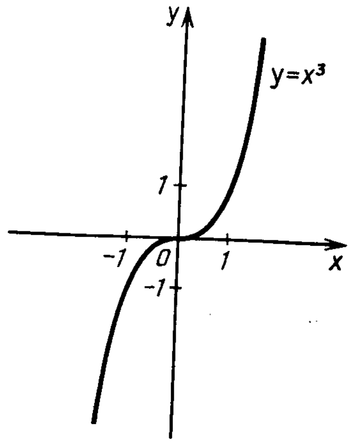



Рыс. 29






Рыс. 31




Рыс. 30

(гэта ўся лікавая прамая) сіметрычная адносна пункта 0 і для любога $x$ выкананы роўнасці $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$, $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$. Графікі гэтых функцый паказаны на рысунках 30 і 31.

Пры пабудаванні графікаў цотных і няцотных функцый будзем карыстацца наступнымі вядомымі з курса алгебры ўласцівасцямі:

1°. *Графік цотнай функцыі сіметрычны адносна восі ардынат.*

2°. *Графік няцотнай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат.*

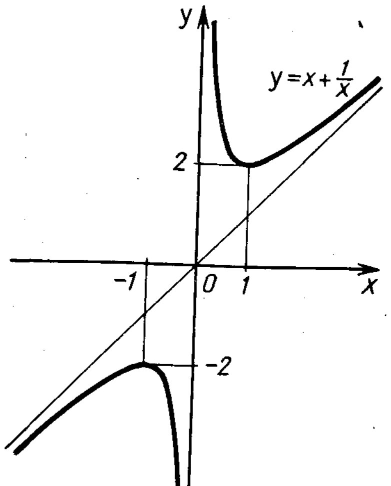
З гэтых двух правіл вынікае наступнае: пры пабудаванні графіка цотнай або няцотнай функцыі дастаткова пабудаваць яго частку для неадмоўных $x$, а затым адлюстраваць атрыманы графік адносна восі ардынат (у выпадку цотнай функцыі) або пачатку каардынат (у выпадку няцотнай).

П р ы к л а д 2. Функцыя $f(x)=x+\frac{1}{x}$ няцотная (дакажыце гэта самастойна). Яе графік сіметрычны адносна пачатку каардынат (рыс. 32).

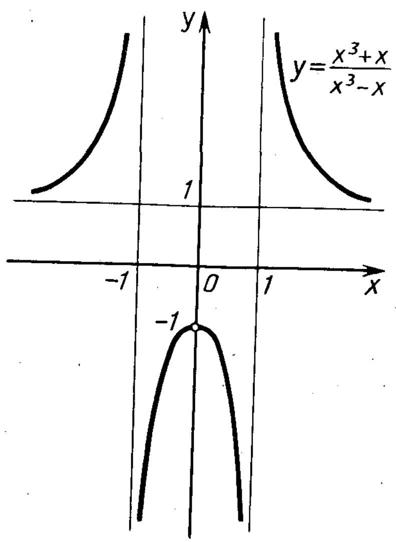
Асноўныя трыганаметрычныя функцыі сінус, тангенс і катангенс з'яўляюцца няцотнымі, а косінус — цотнай функцыяй (гл. п. 2). Таму графікі сінуса, тангенса і катангенса (гл. рыс. 8, 13, 14) сіметрычныя адносна пачатку каардынат, а графік косінуса (гл. рыс. 9) сіметрычны адносна восі ардынат.

П р ы к л а д 3. Функцыя $f(x)=\frac{x^3+x}{x^3-x}$ цотная, паколькі яе вобласць вызначэння сіметрычная адносна пункта $x=0$ (яна складаецца з усіх лікаў, якія адрозніваюцца ад $-1$, 0 і 1) і для ўсіх $x\in D(f)$ выканана роўнасць

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^3-(-x)}=\frac{-x^3-x}{x-x^3}=\frac{x^3+x}{x^3-x}=f(x).$$




Рыс. 32




Рыс. 33

Графік гэтай функцыі сіметрычны адносна восі $Oy$ (рыс. 33).

Прыклад 4. Функцыя $f(x)=x^2+x$ не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай. Яе вобласць вызначэння сіметрычная адносна пункта 0, але, напрыклад, пры $x=1$ не выканана ні роўнасць $f(1)=f(-1)$, ні роўнасць $f(1)=-f(-1)$, паколькі $f(1)=2$, а $f(-1)=0$.

**2. Перыядычныя функцыі.** Вельмі многія працэсы і з'явы, з якімі мы сустракаемся ў практыцы, маюць паўтаральны характар. Так, узаемнае размяшчэнне Сонца і Зямлі паўтараецца праз год. Становішчы маятніка ў моманты часу, якія адрозніваюцца на перыяд вагання маятніка, аднолькавыя.

Такога роду працэсы называюць перыядычнымі, а функцыі, што іх апісваюць,— перыядычнымі функцыямі.

Вядомыя вам асноўныя трыганаметрычныя функцыі — перыядычныя. Так, для любога ліку $x$ і любога цэлага $k$ выканана роўнасць $\sin(x+2\pi k)=\sin x$. Адсюль вынікае, што $2\pi k$ — перыяд функцыі сінус ($k\neq 0$ — адвольны цэлы лік).

Наогул, гаворачы аб перыядычнасці функцыі $f$, дапускаюць, што ёсць такі лік $T\neq 0$, што вобласць вызначэння $D(f)$ разам з кожным пунктам $x$ змяшчае і пункты, якія атрымліваюцца з $x$ паралельнымі пераносамі ўздоўж восі $Ox$ (управа і ўлева) на адлегласць $T$. Функцыю $f$ называюць *перыядычнай* з перыядам $T\neq 0$, калі для любога $x$ з вобласці вызначэння значэнні гэтай функцыі ў пунктах $x$, $x-T$ і $x+T$ роўныя, г. зн. $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.



Паколькі сінус і косінус вызначаны на ўсёй лікавай прамой і $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ для любога $x$, сінус і косінус — перыядычныя функцыі з перыядам $2\pi$.

Тангенс і катангенс — перыядычныя функцыі з перыядам $\pi$. На самай справе, вобласці вызначэння гэтых функцый разам з кожным $x$ змяшчаюць лікі $x+\pi$ і $x-\pi$ і правільныя роўнасці $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$.

Відавочна, што калі функцыя $f$ перыядычная з перыядам $T$, то пры любым цэлым $n\neq 0$ лік $nT$ таксама перыяд гэтай функцыі. Напрыклад, пры $n=3$, выкарыстаўшы некалькі разоў азначэнне перыядычнай функцыі, знаходзім:

$$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=$$
$$=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x).$$

Дакажам, што:

а) *найменшы дадатны перыяд функцый* $y=\sin x$ *і* $y=\cos x$ *роўны* $2\pi$;

б) *найменшым дадатным перыядам функцый* $y=\operatorname{tg} x$ *і* $y=\operatorname{ctg} x$ *з'яўляецца лік* $\pi$.

▽ а) Як ужо адзначалася, лік $2\pi$ з'яўляецца перыядам функцый sin і cos. Таму застаецца даказаць, што дадатны лік, меншы за $2\pi$, не можа быць іх перыядам. Дакажам гэта.

Калі $T$ — адвольны перыяд косінуса, то $\cos(\alpha+T)=\cos\alpha$ пры любым $\alpha$. Дапускаючы $\alpha=0$, знаходзім $\cos T=\cos 0=1$. Найменшы дадатны лік $T$, для якога $\cos x=1$, ёсць $2\pi$.

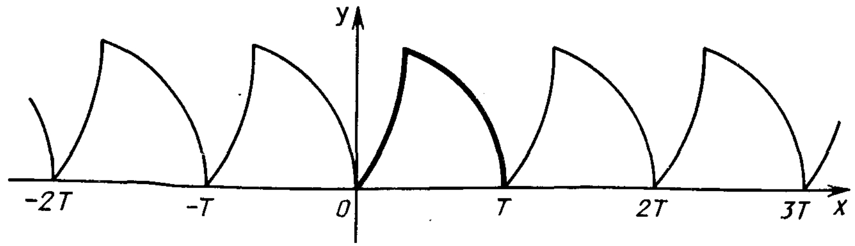
Няхай $T$ — адвольны дадатны перыяд сінуса. Тады $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$ пры любым $\alpha$. Дапускаючы $\alpha=\frac{\pi}{2}$, атрымліваем $\sin\left(T+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Але $\sin x=1$ толькі пры $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. Таму $T=2\pi n$. Найменшы дадатны лік віду $2\pi n$ ёсць $2\pi$.

б) Калі $T$ — дадатны перыяд тангенса, то $\operatorname{tg} T=\operatorname{tg}(0+T)=\operatorname{tg} 0=0$. Паколькі на інтэрвале $(0; \pi)$ тангенс нулёў не мае, $T\geqslant\pi$. Раней даказана, што $\pi$ — перыяд функцыі tg, і, значыць, $\pi$ — гэта найменшы дадатны перыяд тангенса. Для функцыі ctg доказ аналагічны. ▲

Як правіла, словы «найменшы дадатны перыяд» апускаюць. Прынята, напрыклад, гаварыць, што перыяд тангенса роўны $\pi$, а перыяд сінуса роўны $2\pi$.

Перыядычнасцю асноўных трыганаметрычных функцый мы ўжо фактычна карысталіся раней, пры пабудаванні графікаў. Справядліва наступнае сцверджанне:

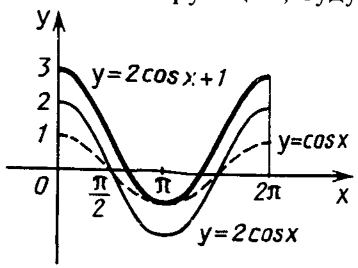
*Для пабудавання графіка перыядычнай функцыі з перыядам $T$ дастаткова правесці пабудаванне на адрэзку даўжынёй $T$ і затым атрыманы графік паралельна перанесці на адлегласці $nT$ управа і ўлева ўздоўж восі $Ox$* (рыс. 34, тут $n$ — любы натуральны лік).




Рыс. 34

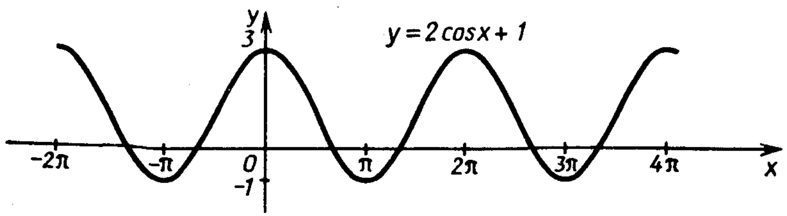
Сапраўды, няхай $(x_0; y_0)$ — пункт графіка перыядычнай функцыі $f$. Тады пункт $x_0+nT$ пры любым цэлым $n$ належыць вобласці вызначэння $f$ (гл. заўвагу ў пачатку пункта) і ў выніку перыядычнасці $f$ справядлівая роўнасць $f(x_0+nT)=f(x_0)=y_0$. Значыць, пункт $(x_0+nT; y_0)$, атрыманы пры паралельным пераносе пункта $(x_0; y_0)$ уздоўж восі $Ox$ на вектар $(nT; 0)$, таксама належыць графіку $f$.

○ Прыклад 5. Пабудуем графік функцыі $f(x)=2\cos x+1$. Для пабудавання выкарыстаем тое, што функцыя $f$ перыядычная з перыядам $2\pi$. Сапраўды, функцыя $f$ вызначана на ўсёй прамой, і, значыць, разам з адвольным пунктам $x_0$ яе вобласць вызначэння змяшчае пункты, якія атрымліваюцца з $x_0$ паралельнымі пераносамі ўздоўж восі $Ox$ управа і ўлева на $2\pi$. Акрамя таго, у выніку перыядычнасці косінуса $f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+1=$ $=2\cos x+1=f(x)$. Карыстаючыся ўласцівасцю графікаў перыядычных функцый, будуем графік $f$ спачатку на адрэзку $[0; 2\pi]$ (для гэтага ў адпаведнасці з вядомымі правіламі пераўтварэння графікаў расцягваем графік косінуса ўздоўж восі $Oy$ у 2 разы і зрушваем яго на 1 уверх, рыс. 35), а затым пры дапамозе паралельных пераносаў працягваем яго на ўсю лікавую прамую (рыс. 36). ●




Рыс. 35

▽ Прыклад 6. Дакажам, што функцыя $f(x)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ перыядычная і яе найменшы дадатны перыяд роўны $\frac{\pi}{2}$. Тангенс вызначаны пры ўсіх значэннях аргумента, не роўных $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Таму вобласць вызначэння дадзенай функцыі складаецца з такіх $x$, што $2x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, г. зн. $x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. Адсюль вынікае, што $D(f)$ разам з адвольным $x_0$ змяшчае і ўсе пункты віду $x_0+$ $+\frac{\pi n}{2}$, $x_0-\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. Відавочна, што лік $\frac{\pi}{2}$ з'яўляецца перыядам $f$, паколькі $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$ $\left.+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$. Застаецца даказаць, што лік $\frac{\pi}{2}$ — найменшы дадатны перыяд $f$. Дапусцім, што перыядам $f$ з'яўляецца такі лік $T_0$, што $T_0<\frac{\pi}{2}$. Тады для любога $x\in D(f)$ справядлівая роўнасць $f(x+T_0)=\operatorname{tg}\left(2(x+T_0)-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$ $\left.+2T_0\right)=f(x)=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$, паколькі $T_0$ — перыяд $f$. Але гэта азначае, што $2T_0$ — перыяд функцыі tg. Па меркаванню $T_0<\frac{\pi}{2}$, і, значыць, $2T_0<\pi$. Прыйшлі да супярэчнасці з даказаным раней: найменшы дадатны перыяд тангенса роўны $\pi$. ▲




Рыс. 36

Аналагічна даказваецца агульнае сцверджанне:

*Калі функцыя $f$ перыядычная і мае перыяд $T$, то функцыя $Af(kx+b)$, дзе $A$, $k$ і $b$ пастаянныя, а $k\neq 0$, таксама перыядычная, прычым яе перыяд роўны $\frac{T}{|k|}$.*

З гэтага сцверджання адразу атрымліваем, што, напрыклад, перыядам функцыі $\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ з'яўляецца лік $\frac{2\pi}{3}$, а перыяд функцыі $\cos\left(-\frac{x}{2}+\pi\right)$ роўны $4\pi$.

### *Практыкаванні*

Дакажыце, што функцыі з'яўляюцца цотнымі (57—58).

**57.** а) $f(x)=3x^2+x^4$; б) $f(x)=x^5\sin\frac{x}{2}$;

в) $f(x)=x^2\cos x$; г) $f(x)=4x^6-x^2$.

**58.** а) $f(x)=\frac{\cos 5x+1}{|x|}$; б) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2-1}$;

в) $f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x^3}$; г) $f(x)=\frac{\cos x^3}{4-x^2}$.

Дакажыце, што функцыі з'яўляюцца няцотнымі (59—60).

**59.** а) $f(x)=x^3 \sin x^2$; б) $f(x)=x^2(2x-x^3)$;
в) $f(x)=x^5 \cos 3x$; г) $f(x)=x(5-x^2)$.

**60.** а) $f(x)=\frac{x^4+1}{2x^3}$; б) $f(x)=\frac{\cos x^3}{x(25-x^2)}$;
в) $f(x)=\frac{3x}{x^6+2}$; г) $f(x)=\frac{x^2 \sin x}{x^2-9}$.

**61.** На рысунку 37, *а—г* пабудаваны графік функцыі $f$ для ўсіх $x$, якія задавальняюць умове $x \geqslant 0$ ($x \leqslant 0$). Пабудуйце графік функцыі $f$, калі вядома: 1) $f$ — цотная функцыя; 2) $f$ — няцотная функцыя.

**62.** Дакажыце, што лік $T$ з'яўляецца перыядам функцыі $f$, калі:

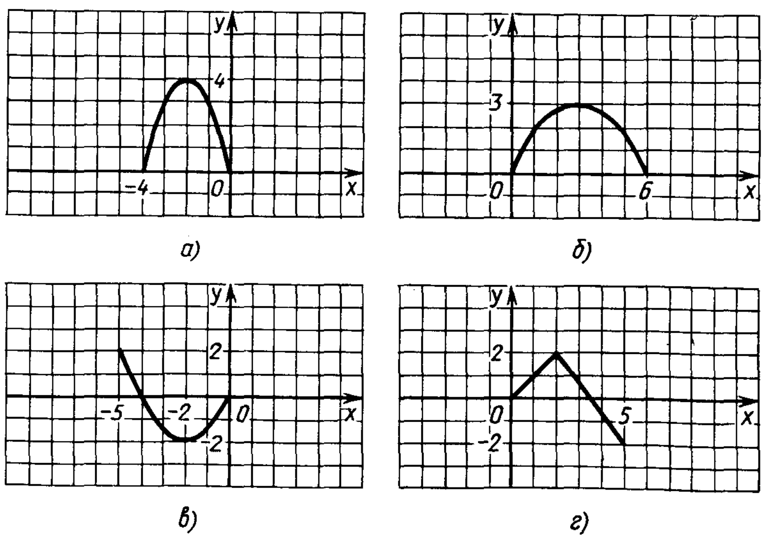
а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $T=4\pi$; б) $f(x)=2 \operatorname{tg} 3x$, $T=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=3\cos 4x$, $T=\frac{\pi}{2}$; г) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$, $T=3\pi$.

**63.** Дакажыце, што функцыя $f$ з'яўляецца перыядычнай:
а) $f(x)=2-\cos x$; б) $f(x)=\operatorname{tg} 2x$;
в) $f(x)=\sin x+\cos x$; г) $f(x)=3+\sin^2 x$.

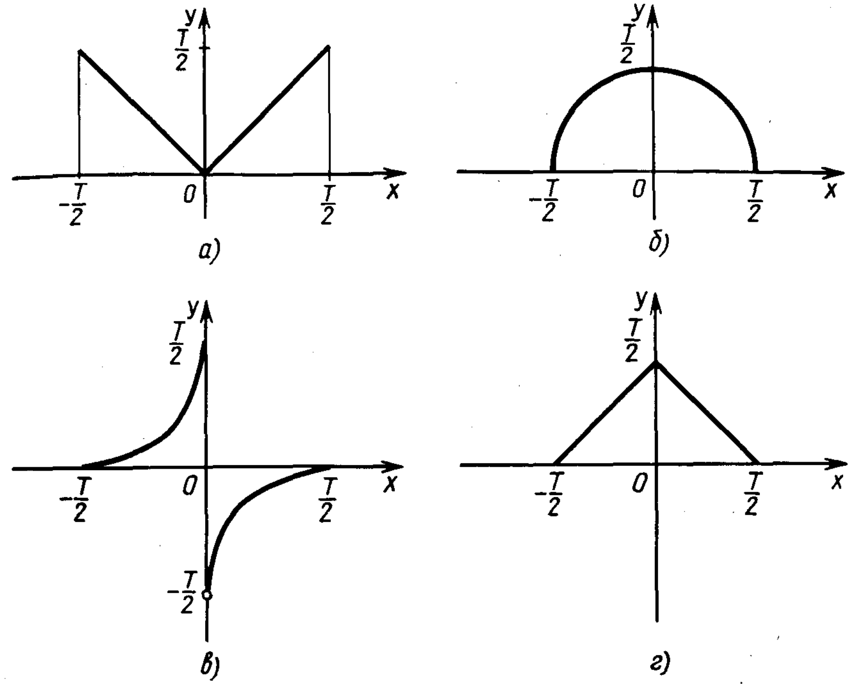
Знайдзіце найменшы дадатны перыяд кожнай з функцый (64—65).

**64.** а) $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4}$; б) $y=3 \operatorname{tg} 1{,}5x$;




Рыс. 37






Рыс. 38

в) $y=4\cos 2x$; г) $y=5 \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

**65.** а) $y=\sin x \cos x$; б) $y=\sin x \sin 4x-\cos x \cos 4x$;
в) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; г) $y=\sin 3x \cos x+\cos 3x \sin x$.

**66.** На рысунку 38, *а—г* паказана частка графіка функцыі, якая мае перыяд $T$. Пабудуйце графік гэтай функцыі на прамежку $[-1{,}5T;\ 2{,}5T]$.

**67.** Знайдзіце найменшы дадатны перыяд і пабудуйце графік функцыі:

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\frac{x}{3}$; в) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $y=\sin 1{,}5x$.

**68.** Для функцыі $f$ вучань праверыў справядлівасць дзвюх роўнасцей і зрабіў вывад, што $T$ з'яўляецца перыядам $f$. Ці мае рацыю вучань, калі:

а) $f(x)=\sin x$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $T=\frac{2\pi}{3}$;

б) $f(x)=\cos x$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=0$, $T=\pi$;

в) $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{калі } x \leqslant 1, \\ 3-x, & \text{калі } x>1, \end{cases}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0{,}5,\ f\left(-\frac{1}{2}+3\right)=0{,}5,\ T=3;$$

г) $f(x)=x+|x|,\ f(-4)=0,\ f(-4+3)=0,\ T=3$?

---

Якія з дадзеных ніжэй функцый з'яўляюцца цотнымі, якія — няцотнымі, а якія не з'яўляюцца ні цотнымі, ні няцотнымі (69—70)?

**69.** а) $y=\sin x+\operatorname{ctg} x-x$; б) $y=\dfrac{|x|}{\sin x\cos x}$;

в) $y=x^4+\operatorname{tg}^2 x+x\sin x$; г) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{|x|}$.

**70.** а) $y=\dfrac{\sin x}{x^3-1}$; б) $y=\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

в) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$; г) $y=\dfrac{x+\operatorname{tg} x}{x\cos x}$.

**71.** Дакажыце, што дадзеная функцыя з'яўляецца цотнай або няцотнай, і пабудуйце яе графік:

а) $y=\dfrac{1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{1}{x^3}$.

**72.** Функцыі $f$ і $g$ вызначаны на мностве ўсіх сапраўдных лікаў. Ці з'яўляецца функцыя $h$ цотнай або няцотнай, калі:

а) $h(x)=f(x)g^2(x)$, $f$ — цотная функцыя, $g$ — няцотная;

б) $h(x)=f(x)-g(x)$, $f$ і $g$ — цотныя функцыі;

в) $h(x)=f(x)+g(x)$, $f$ і $g$ — няцотныя функцыі;

г) $h(x)=f(x)g(x)$, $f$ і $g$ — няцотныя функцыі?

**73.** Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y=\sin^2 x$; б) $y=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$;

в) $y=\sin^4 x-\cos^4 x$; г) $y=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

**74.** Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=1-\cos 1{,}5x$; б) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y=2+\sin\frac{x}{2}$; г) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

**75.** Дакажыце, што калі функцыя $y=f(x)$ перыядычная, то і функцыя $y=kf(x)+b$ перыядычная.

**76.** Дакажыце, што лік 2 не з'яўляецца перыядам функцыі:

а) $y=x^2-3$; б) $y=\cos x$; в) $y=3x-5$; г) $y=|x|$.



## 5. Узрастанне і ўбыванне функцый. Экстрэмумы

**1. Узрастанне і ўбыванне функцый.** Вы ўжо знаёмы з паняццем узрастаючай і ўбываючай функцый. Так, на рысунку 39 паказаны графік функцыі, вызначанай на адрэзку $[-1;\ 10]$. Гэта функцыя ўзрастае на адрэзках $[-1;\ 3]$ і $[4;\ 5]$, убывае на адрэзках $[3;\ 4]$ і $[5;\ 10]$. Вядома, што функцыя $y=x^2$ убывае на прамежку $(-\infty;\ 0]$ і ўзрастае на прамежку $[0;\ \infty)$. Графік гэтай функцыі пры змяненні $x$ ад $-\infty$ да $\infty$ спачатку «апускаецца» да нуля (значэнне функцыі ў пункце 0 роўна нулю), а затым «падымаецца» да бесканечнасці (гл. рыс. 20).

Азначэнне. **Функцыя $f$ *узрастае* на мностве $P$, калі для любых $x_1$ і $x_2$ з мноства $P$, такіх, што $x_2>x_1$, выканана няроўнасць $f(x_2)>f(x_1)$.**

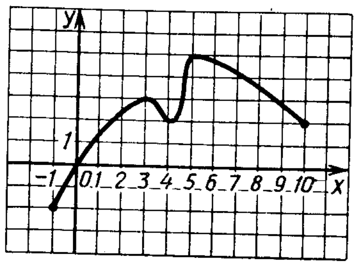
Азначэнне. **Функцыя $f$ *убывае* на мностве $P$, калі для любых $x_1$ і $x_2$ з мноства $P$, такіх, што $x_2>x_1$, выканана няроўнасць $f(x_2)<f(x_1)$.**

Інакш кажучы, функцыя $f$ называецца ўзрастаючай на мностве $P$, калі большаму значэнню аргумента з гэтага мноства адпавядае большае значэнне функцыі. Функцыя $f$ называецца ўбываючай на мностве $P$, калі большаму значэнню аргумента адпавядае меншае значэнне функцыі.

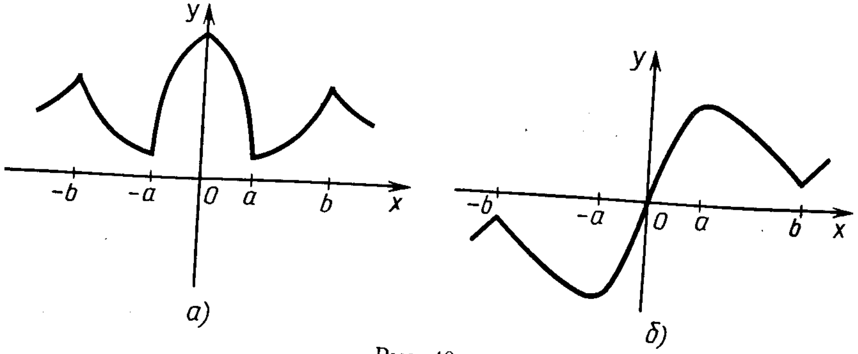
Прыклад 1. Дакажам, што функцыя $f(x)=x^n$ ($n\in\mathbf{N}$) пры няцотным $n$ узрастае на ўсёй лікавай прамой, а пры цотным $n$ функцыя $f(x)=x^n$ узрастае на прамежку $[0;\ \infty)$ і ўбывае на прамежку $(-\infty;\ 0]$.

Дакажам спачатку, што функцыя $f(x)=x^n$ узрастае на прамежку $[0;\ \infty)$ пры любым натуральным $n$. Няхай $x_2>x_1\geqslant 0$. Тады па ўласцівасці ступені $x_2^n>x_1^n$. Цяпер разгледзім выпадак цотнага $n$. Няхай $x_1<x_2\leqslant 0$. Тады $-x_1>-x_2\geqslant 0$ і $(-x_1)^n>(-x_2)^n\geqslant 0$, г. зн. $x_1^n>x_2^n$. Тым самым доказана, што функцыя $f(x)=x^n$ убывае на $(-\infty;\ 0]$ пры цотным $n$. Засталося разгледзець выпадак няцотнага $n$. Калі $x_1<0<x_2$, то $x_1^n<0<x_2^n$. Калі $x_1<x_2\leqslant 0$, то $-x_1>-x_2\geqslant 0$ і таму $(-x_1)^n>(-x_2)^n\geqslant 0$, г. зн. $-x_1^n>-x_2^n$, адкуль вынікае, што $x_2^n>x_1^n$. Такім чынам, даказана, што для няцотнага $n$ з няроўнасці $x_2>x_1$ вынікае няроўнасць $x_2^n>x_1^n$. Згодна з азначэннем функцыя $f(x)=x^n$ пры няцотным $n$ узрастае на ўсёй лікавай прамой.

Прыклад 2. Дакажам, што калі функцыя $y=f(x)$ узрастае на мностве $P$, то функцыя $y=-f(x)$ убывае на мностве $P$. Няхай $x_1$ і $x_2$ — любыя два лікі з мноства $P$, такія, што $x_2>x_1$. Трэба даказаць, што $-f(x_2)<-f(x_1)$, г. зн. $f(x_1)<f(x_2)$. Але гэта — відавочны вынік умовы: $f$ узрастае на мностве $P$.




Рыс. 39




Рыс. 40

П р ы к л а д 3. Функцыя $f(x)=\frac{1}{x}$ убывае на кожным з прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$ (дакажыце самастойна). Аднак гэта функцыя не з'яўляецца ўбываючай на аб'яднанні гэтых прамежкаў. Напрыклад, $1>-1$, але $f(1)>f(-1)$. ●

Пры даследаванні функцый на ўзрастанне і ўбыванне прынята ўказваць прамежкі ўзрастання і ўбывання максімальнай даўжыні, уключаючы канцы (калі, безумоўна, яны ўваходзяць у гэтыя прамежкі). Так, можна было сказаць, што функцыя $f(x)=\frac{1}{x}$ убывае на адрэзку $[2;\ 100]$. Гэта правільна, але такі адказ няпоўны.

З а ў в а г а. Для цотных і няцотных функцый задача знаходжання прамежкаў узрастання і ўбывання некалькі спрашчаецца: дастаткова знайсці гэтыя прамежкі пры $x\geqslant 0$ (рыс. 40).

Няхай, напрыклад, функцыя $f$ цотная і ўзрастае на прамежку $[a;\ b]$, дзе $b>a\geqslant 0$. Дакажам, што гэта функцыя ўбывае на прамежку $[-b;\ -a]$.

Сапраўды, няхай $-a\geqslant x_2>x_1\geqslant -b$. Тады $f(-x_2)=f(x_2)$, $f(-x_1)=f(x_1)$, прычым $a\leqslant -x_2<-x_1\leqslant b$, і паколькі $f$ узрастае на $[a;\ b]$, маем $f(-x_1)>f(-x_2)$, г. зн. $f(x_1)>f(x_2)$.

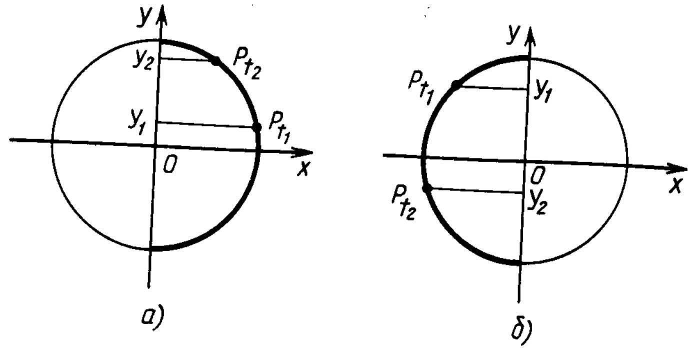
**2. Узрастанне і ўбыванне трыганаметрычных функцый.** Дакажам спачатку, што сінус узрастае на прамежках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. З прычыны перыядычнасці сінуса доказ дастаткова правесці для адрэзка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Няхай $x_2>x_1$. Прымяняючы формулу рознасці сінусаў, знаходзім:

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}. \qquad (1)$$

З няроўнасці $-\frac{\pi}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ вынікае, што

$$0<\frac{x_2-x_1}{2}\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ і } -\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2}.$$






Рыс. 41

Таму $\cos\frac{x_1+x_2}{2}>0$, $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$. З (1) вынікае, што рознасць $\sin x_2-\sin x_1$ дадатная, г. зн. $\sin x_2>\sin x_1$. Тым самым даказана, што сінус узрастае на ўказаных прамежках.

Аналагічна даказваецца, што прамежкі $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$, з'яўляюцца прамежкамі ўбывання сінуса.

Заўважым, што атрыманы рэзультат лёгка праілюстраваць пры дапамозе адзінкавай акружнасці: калі $-\frac{\pi}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant\frac{\pi}{2}$, то пункт $P_{t_2}$ мае, зразумела, ардынату, большую, чым ардыната пункта $P_{t_1}$ (рыс. 41, а). Калі $\frac{\pi}{2}\leqslant t_1<t_2\leqslant\frac{3\pi}{2}$, то ардыната пункта $P_{t_2}$ меншая за ардынату пункта $P_{t_1}$ (рыс. 41, б).

Прамежкамі ўзрастання косінуса з'яўляюцца адрэзкі $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, дзе $n\in\boldsymbol{Z}$, а прамежкамі ўбывання — адрэзкі $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, дзе $n\in\boldsymbol{Z}$. Доказ можна правесці прыкладна гэтак жа, як і ў выпадку сінуса. Больш проста будзе выкарыстаць формулу прывядзення $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. З яе адразу вынікае, напрыклад, што прамежкамі ўзрастання косінуса з'яўляюцца прамежкі, атрыманыя з прамежкаў узрастання сінуса зрухам на $\frac{\pi}{2}$ улева.

Дакажам, што функцыя тангенс узрастае на прамежках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, дзе $n\in\boldsymbol{Z}$. З прычыны перыядычнасці тангенса доказ дастаткова правесці для інтэрвалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Няхай $x_1$ і $x_2$ — адвольныя лікі з гэтага інтэрвалу, такія, што $x_2>x_1$. Трэба даказаць, што $\operatorname{tg} x_2>\operatorname{tg} x_1$. Маем

$$\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin x_2\cos x_1-\sin x_1\cos x_2}{\cos x_2\cos x_1}=$$

$$=\frac{\sin(x_2-x_1)}{\cos x_1\cos x_2}.$$

Па дапушчэнню $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Таму $\cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$. А паколькі $0 < x_2 - x_1 < \pi$, то і $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Значыць, $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$, г. зн. $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, што і патрабавалася даказаць.

Аналагічна даказваецца, што ctg убывае на прамежках $(\pi n;\ \pi + \pi n)$, дзе $n \in \mathbf{Z}$.

**3. Экстрэмумы.** Пры даследаванні паводзін функцыі паблізу некаторага пункта зручна карыстацца паняццем наваколля. *Наваколлем пункта а* называецца любы інтэрвал, які змяшчае гэты пункт. Напрыклад, інтэрвал (2; 6) — адно з наваколляў пункта 3, інтэрвал (—3,3; —2,7) — наваколле пункта —3.

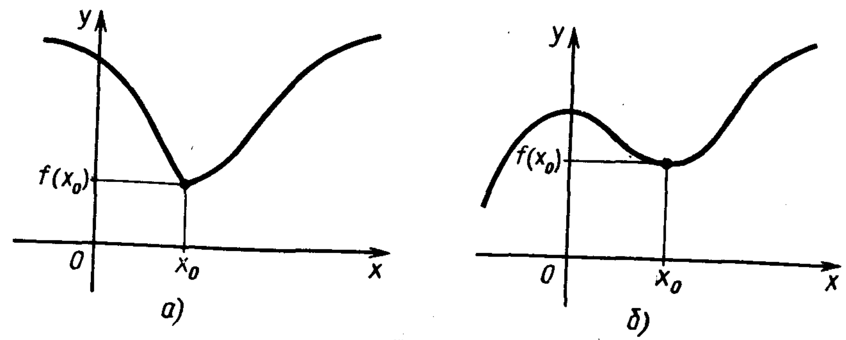
Вывучаючы графік рысунка 39, можна прыйсці да вываду, што найбольш «прыкметнымі» пунктамі вобласці вызначэння з'яўляюцца такія пункты $x$, у якіх узрастанне функцыі змяняецца ўбываннем (пункты 3 і 5) або, наадварот, убыванне змяняецца ўзрастаннем (пункт 4). Гэтыя пункты называюць адпаведна *пунктамі максімуму* ($x_{\max} = 3$ і $x_{\max} = 5$) і *мінімуму* ($x_{\min} = 4$).

Пры пабудаванні графікаў канкрэтных функцый карысна папярэдне знайсці такія пункты. Напрыклад, для функцыі sin гэта пункты віду $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Возьмем для пэўнасці $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Гэты пункт з'яўляецца правым канцом прамежку ўзрастання сінуса, і таму $1 = \sin x_0 > \sin x$, калі $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Акрамя таго, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ — левы канец прамежку ўбывання, і, значыць, $\sin x < \sin x_0$ пры $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Такім чынам, $\sin\frac{\pi}{2} > \sin x$ для любога $x$, які ляжыць у наваколлі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ пункта $x_0 = \frac{\pi}{2}$, і таму $x_0 = \frac{\pi}{2}$ — пункт максімуму функцыі сінус.

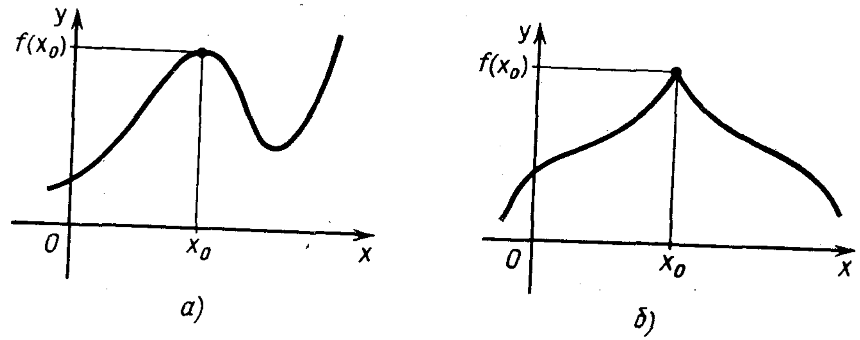
У пункце $-\frac{\pi}{2}$, наадварот, убыванне функцыі змяняецца на ўзрастанне $\left(\text{злева ад } -\frac{\pi}{2} \text{ функцыя ўбывае, а справа ўзрастае}\right)$. Разважаючы аналагічна, атрымліваем, што $\sin x > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ у некаторым наваколлі пункта $-\frac{\pi}{2}$, і таму $-\frac{\pi}{2}$ — пункт мінімуму функцыі сінус. Дадзім дакладныя азначэнні пунктаў экстрэмуму.

Азначэнне. **Пункт $x_0$ называецца *пунктам мінімуму функцыі* $f$, калі для ўсіх $x$ з некаторага наваколля $x_0$ выканана няроўнасць $f(x) \geqslant f(x_0)$** (рыс. 42).





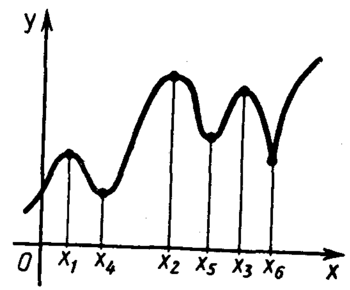

Рыс. 42




Рыс. 43

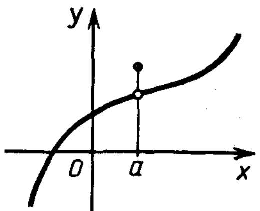
Азначэнне. **Пункт $x_0$ называецца *пунктам максімуму функцыі* $f$, калі для ўсіх $x$ з некаторага наваколля $x_0$ выканана няроўнасць $f(x) \leqslant f(x_0)$** (рыс. 43).

Па азначэнню значэнне функцыі $f$ у пункце максімуму $x_0$ з'яўляецца найбольшым сярод значэнняў функцыі з некаторага наваколля гэтага пункта, таму графік функцыі ў наваколлі $x_0$, як правіла, мае выгляд гладкага «ўзгорка» (рыс. 43, *а* і рыс. 44 — пункты $x_1$, $x_2$, $x_3$) або завостранага «піка» (рыс. 43, *б*). У наваколлі пункта мінімуму графікі, як правіла, паказваюцца ў выглядзе «ўпадзіны», таксама або гладкай (рыс. 42, *б* — пункт $x_0$, рыс. 44 — пункты $x_4$, $x_5$), або завостранай (рыс. 42, *а* — пункт $x_0$ і рыс. 44 — пункт $x_6$).

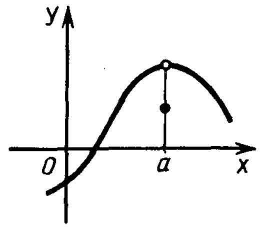



Рыс. 44

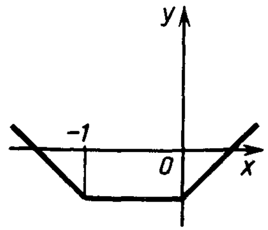
Іншыя прыклады паводзін графікаў функцый у пунктах максімуму або мінімуму прыведзены на рысунках 45 (*а* — пункт максімуму), 46 (*а* — пункт мінімуму) і 47 (тут кожны пункт прамежку (—1; 0) з'яўля-




Рыс. 45




Рыс. 46




Рыс. 47

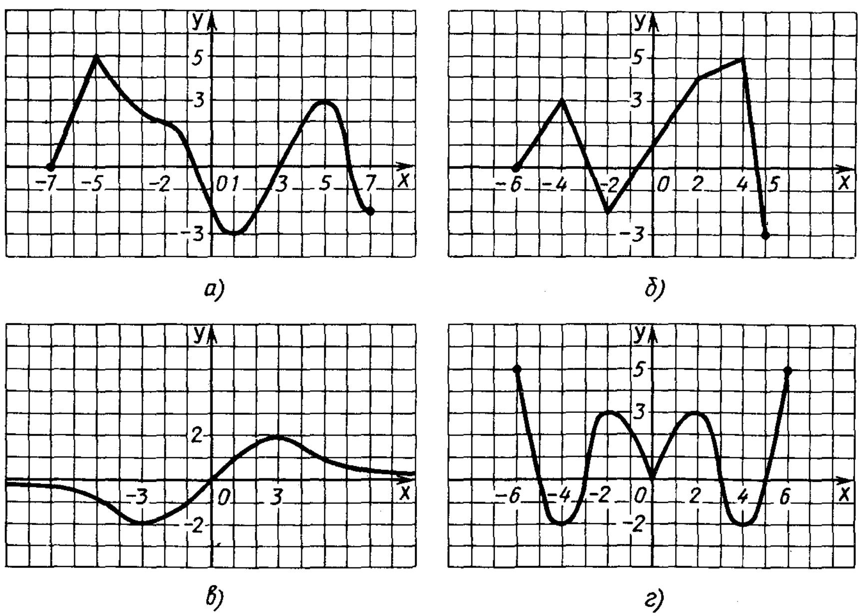
ецца як пунктам мінімуму, так і пунктам максімуму).

Для пунктаў максімуму і мінімуму функцыі прынята агульная назва — іх называюць *пунктамі экстрэмуму*. Значэнні функцыі ў гэтых пунктах называюць адпаведна *максімумамі* і *мінімумамі* функцыі (агульная назва — *экстрэмум функцыі*). Пункты максімуму абазначаюць $x_{max}$, а пункты мінімуму $x_{min}$. Значэнні функцыі ў гэтых пунктах абазначаюцца адпаведна $y_{max}$ і $y_{min}$.

### *Практыкаванні*

**77.** Для функцый, графікі якіх паказаны на рысунку 48, *а—г*, знайдзіце:

а) прамежкі ўзрастання і ўбывання функцыі;



Рыс. 48



б) пункты максімуму і мінімуму функцыі;

в) экстрэмумы функцыі.

Начарціце эскіз графіка функцыі $f$ (78—80).

**78.** а) $f$ узрастае на прамежку $(-\infty;\ 2]$ і ўбывае на прамежку $[2;\ \infty)$;

б) $f$ узрастае на прамежках $(-\infty;\ -2]$ і $[0;\ 3]$, убывае на прамежках $[-2;\ 0]$ і $[3;\ \infty)$;

в) $f$ убывае на прамежку $(-\infty;\ -1]$ і ўзрастае на прамежку $[-1;\ \infty)$;

г) $f$ убывае на прамежках $(-\infty;\ 1]$ і $[4;\ \infty)$, узрастае на прамежку $[1;\ 4]$.

**79.** а) $x_{max}=-3$, $x_{min}=4$, $f(-3)=5$, $f(4)=-5$;

б) $x_{min}=-2$, $x_{min}=2$, $x_{max}=0$, $f(-2)=f(2)=-3$, $f(0)=2$;

в) $x_{min}=-5$, $x_{max}=2$, $f(-5)=1$, $f(2)=6$;

г) $x_{max}=-4$, $x_{max}=3$, $x_{min}=-1$, $f(-4)=5$, $f(3)=2$, $f(-1)=-2$.

**80.** а) $f$ — цотная функцыя, $x_{max}=-3$, $x_{min}=0$, $f(-3)=4$, $f(0)=0$;

б) $f$ — няцотная функцыя, $x_{max}=2$, $x_{min}=5$, $f(2)=3$, $f(5)=-4$;

в) $f$ — цотная функцыя, $x_{min}=4$, $x_{max}=0$, $f(4)=-2$, $f(0)=2$;

г) $f$ — няцотная функцыя, $x_{min}=-4$, $x_{max}=-1$, $f(-4)=-3$, $f(-1)=1$.

**81.** Дакажыце, што функцыя $y=kx+b$:

а) узрастае на мностве $\boldsymbol{R}$ пры $k>0$;

б) убывае на мностве $\boldsymbol{R}$ пры $k<0$.

Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання, пункты максімуму і пункты мінімуму функцыі, яе максімумы і мінімумы (82—85).

**82.** а) $y=-x^2+6x-8$; б) $y=(x+2)^4+1$;

в) $y=x^2-4x$; г) $y=(x-3)^4$.

**83.** а) $y=\frac{3}{x-2}$; б) $y=-(x+3)^5$;

в) $y=-\frac{1}{x+3}$; г) $y=(x-4)^3$.

**84.** а) $y=3\sin x-1$; б) $y=-2\cos x+1$;

в) $y=2\cos x+1$; г) $y=0{,}5\sin x-1{,}5$.

**85.** а) $y=1+2\operatorname{tg} x$; б) $y=\sin x+1$;

в) $y=-\operatorname{tg} x$; г) $y=\cos x-1$.

**86.** Параўнайце лікі:

а) $\cos\frac{3\pi}{7}$ і $\cos\frac{2\pi}{9}$; б) $\sin\frac{5\pi}{7}$ і $\sin\frac{7\pi}{8}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{7}$ і $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$; г) $\sin\frac{4\pi}{9}$ і $\sin\frac{3\pi}{8}$.

**87.** Размясціце лікі ў парадку ўзрастання:

а) $\sin 3{,}2$, $\sin 3{,}8$, $\sin 1{,}3$; б) $\cos 0{,}9$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}3$;
в) $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 1{,}4$, $\operatorname{tg}(-0{,}3)$; г) $\sin 1{,}2$, $\sin(-1{,}2)$, $\sin 0{,}8$.

---

Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання, пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі (88—89).

**88.** а) $y=\frac{1}{(x-2)^2}+1$; б) $y=4|x|-x^2$;
в) $y=\frac{1}{(x+1)^3}-2$; г) $y=x^2-2|x|$.

**89.** а) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=1-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;
в) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $y=2+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

**90.** Размясціце лікі ў парадку ўзрастання:

а) $\cos\frac{25\pi}{9}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, $\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$;

г) $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$, $\cos\frac{13\pi}{24}$, $\sin\frac{5\pi}{24}$, $\sin\frac{17\pi}{6}$.

**91.** Дакажыце, што функцыя:
а) $f(x)=x^4+3x$ узрастае на $[0;\ \infty)$;
б) $f(x)=-x^3-2x$ убывае на $\boldsymbol{R}$;
в) $f(x)=x^6-0{,}5$ убывае на $(-\infty;\ 0]$;
г) $f(x)=x^5+1{,}5x$ узрастае на $\boldsymbol{R}$.

**92.** Дакажыце наступныя сцверджанні:
а) калі $f$ — цотная функцыя, $x_0$ — пункт максімуму, то $-x_0$ з'яўляецца пунктам максімуму;
б) калі $f$ — няцотная функцыя і на прамежку $[a;\ b]$ яна ўбывае, то і на прамежку $[-b;\ -a]$ функцыя $f$ убывае;
в) калі $f$ — няцотная функцыя, $x_0$ — пункт мінімуму, то $-x_0$ з'яўляецца пунктам максімуму;
г) калі $f$ — цотная функцыя і на прамежку $[a;\ b]$ функцыя ўзрастае, то на прамежку $[-b;\ -a]$ яна ўбывае.



## 6. Даследаванне функцый

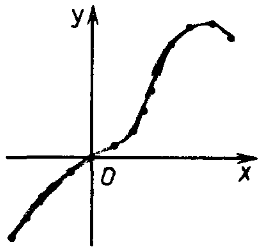
**1. Пабудаванне графікаў функцый.** Раней вы будавалі графікі функцый «па пунктах». У многіх выпадках гэты метад дае добрыя вынікі, калі, зразумела, адзначыць дастаткова вялікі лік пунктаў. Аднак пры гэтым прыходзіцца складаць вялікія табліцы значэнняў функцыі, а галоўнае, можна не заўважыць істотных асаблівасцей функцыі і ў выніку памыліцца пры пабудаванні графіка.

Дапусцім, напрыклад, што, вылічыўшы значэнні функцыі ў 15 пунктах і адзначыўшы адпаведныя пункты графіка на каардынатнай плоскасці, мы прыйшлі да рысунка 49. Натуральна дапусціць, што эскіз графіка блізкі да непарыўнай крывой, якая праходзіць праз усе гэтыя пункты (рыс. 50). Аднак «сапраўдны» графік (які, натуральна, праходзіць праз усе гэтыя пункты) можа быць зусім не падобны да гэтага эскіза (рыс. 51—53).

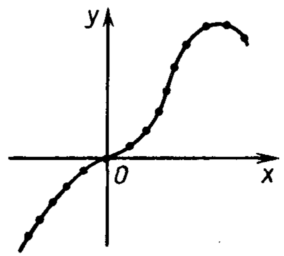
Для таго каб пазбегнуць памылак, трэба навучыцца выяўляць характэрныя асаблівасці функцыі, г. зн. папярэдне правесці яе даследаванне. Няхай, напрыклад, аб функцыі $f$ нам вядома, што яна:

вызначана на аб'яднанні прамежкаў $(-\infty;\ -10)$, $(-10;\ 10)$, $(10;\ \infty)$;

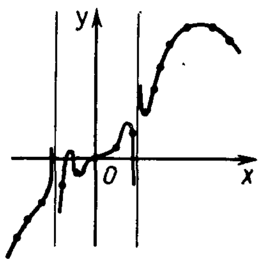
абарачаецца ў нуль у пунктах $-11$ і $0$, адмоўная на інтэрвалах $(-\infty;\ -11)$, $(-10;\ 0)$ і дадатная на інтэрвалах $(-11;\ -10)$, $(0;\ 10)$ і $(10;\ \infty)$;



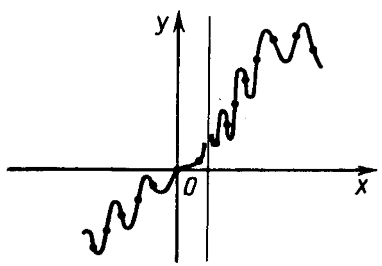
Рыс. 49



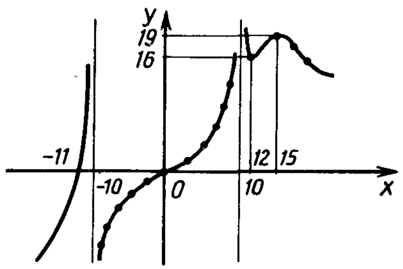
Рыс. 50



Рыс. 51



Рыс. 52



Рыс. 53

узрастае на прамежках $(-\infty; -10)$ і $(-10; 10)$, $[12; 15]$ і ўбывае на прамежках $(10; 12]$ і $[15; \infty)$;

мае мінімум у пункце 12, прычым $f(12)=16$, і максімум у пункце 15, прычым $f(15)=19$;

нарэшце, значэнні $f$ пры набліжэнні значэнняў аргумента да $-10$ і 10 неабмежавана ўзрастаюць па абсалютнай велічыні.

Гэтыя звесткі дазваляюць зразумець, што эскіз графіка функцыі прыкладна такі, якім ён паказаны на рысунку 53.

Разгледзім яшчэ адзін прыклад: даследуем функцыю

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}.$$

1) Знойдзем вобласць вызначэння функцыі. У дадзеным выпадку $D(f)$ — уся лікавая прамая, паколькі назоўнік $x^2+1$ не ператвараецца ў нуль.

2) Заўважым, што функцыя $f$ цотная: для любога $x$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x).$$

Таму дастаткова даследаваць функцыю і пабудаваць яе графік пры $x\geqslant 0$, пасля гэтага застаецца адлюстраваць пабудаваную частку графіка адносна восі ардынат.

3) Знойдзем пункты перасячэння графіка $f$ з восямі каардынат. Вось ардынат графік $f$ перасякае ў пункце $(0; f(0))$. Значэнне $f(0)$ роўна 1. Таму графік $f$ праходзіць праз пункт $(0; 1)$.

Для таго каб знайсці пункты перасячэння графіка функцыі $f$ з воссю абсцыс, трэба рашыць ураўненне $f(x)=0$ (яго карані называюць *нулямі функцыі*). Ураўненне $\frac{1}{x^2+1}=0$ не мае каранёў. Значыць, графік $f$ не перасякае вось абсцыс.

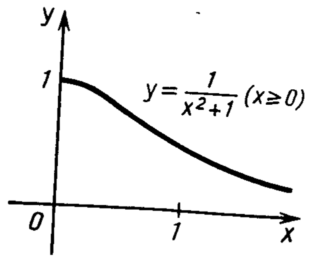
4) Высветлім, на якіх прамежках функцыя $f$ прымае дадатныя, а на якіх — адмоўныя значэнні; іх называюць *прамежкамі знакапастаянства функцыі*. Над гэтымі прамежкамі графік функцыі ляжыць вышэй (адпаведна ніжэй) восі абсцыс. У дадзеным выпадку, паколькі пры любым $x$ значэнне $x^2+1$ дадатнае, $f(x)>0$ на ўсёй лікавай прамой.

5) Істотна аблягчаюць пабудаванне графіка звесткі пра тое, на якіх прамежках функцыя ўзрастае або ўбывае (гэтыя прамежкі называюць *прамежкамі ўзрастання* або *ўбывання* функцыі). Дакажам, што для разглядаемай функцыі прамежак узрастання — гэта $(-\infty; 0]$, а прамежак убывання — $[0; \infty)$.

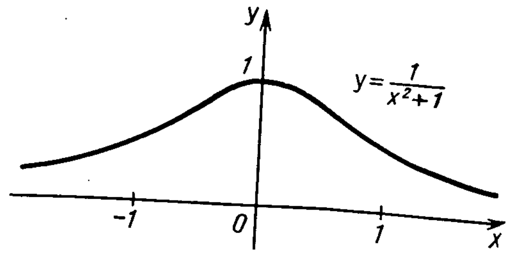
Няхай $x_1$ і $x_2$ — два значэнні з прамежку $[0; \infty)$, прычым $x_2>x_1$. Паколькі $x_1$ і $x_2$ дадатныя, з умовы $x_2>x_1$ вынікае $x_2^2>x_1^2$, $x_2^2+1>x_1^2+1$ і, нарэшце, $\frac{1}{x_2^2+1}<\frac{1}{x_1^2+1}$. Такім чынам, $f(x_2)<f(x_1)$, г. зн. функцыя $f$ убывае на прамежку $[0; \infty)$.

На прамежку $(-\infty; 0]$ функцыя $f$ узрастае. Доказ праводзіцца аналагічна (можна таксама выкарыстаць цотнасць дадзенай функцыі).






Рыс. 54




Рыс. 55

6) Знойдзем значэнні функцыі ў пунктах, у якіх узрастанне змяняецца ўбываннем або наадварот. У нашым выпадку ёсць толькі адзін пункт, які належыць адначасова і прамежку ўзрастання, і прамежку ўбывання,— гэта пункт 0. Пункт 0 — пункт максімуму функцыі $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $f(0)=1$.

7) Заўважым, нарэшце, што пры неабмежаваным павелічэнні $x$ значэнне $x^2+1$ неабмежавана ўзрастае, а таму значэнні $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ (застаючыся дадатнымі) прыбліжаюцца да нуля.

Атрыманых у ходзе даследавання ўласцівасцей функцыі $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ дастаткова для пабудавання яе графіка.

Пабудуем пункт графіка $(0; 1)$. Мы ўстанавілі, што $[0; \infty)$ — прамежак убывання функцыі $f$. Таму правей за пункт з абсцысай 0 графік рысуем у выглядзе крывой, якая «ідзе ўніз» (рыс. 54). Паколькі $f(x)>0$ пры любым $x$, гэта крывая не можа спусціцца ніжэй за вось абсцыс, прычым (гл. п. 7 даследавання) пры прадаўжэнні ўправа графік неабмежавана прыбліжаецца да восі абсцыс. Застаецца выкарыстаць цотнасць функцыі $f$: графік $f$ атрымліваем, адлюстраваўшы пабудаваную для $x\geqslant 0$ крывую сіметрычна адносна восі ардынат (рыс. 55).

**2. Схема даследавання функцый.** Пры даследаванні функцый мы будзем прытрымлівацца апісанай схемы. У агульным выпадку даследаванне прадугледжвае рашэнне наступных задач:

1) Знайсці вобласці вызначэння і значэнняў дадзенай функцыі $f$.

2) Высветліць, ці валодае функцыя асаблівасцямі, якія аблягчаюць даследаванне, г. зн. ці з'яўляецца функцыя $f$: а) цотнай або няцотнай; б) перыядычнай.

3) Вылічыць каардынаты пунктаў перасячэння графіка з восямі каардынат.

4) Знайсці прамежкі знакапастаянства функцыі $f$.

5) Высветліць, на якіх прамежках функцыя $f$ узрастае, а на якіх убывае.

6) Знайсці пункты экстрэмуму, від экстрэмуму (максімум або мінімум) і вылічыць значэнні $f$ у гэтых пунктах.

7) Даследаваць паводзіны функцыі $f$ у наваколлі характэрных пунктаў, якія не ўваходзяць у вобласць вызначэння $\left(\text{напрыклад, пункт } x=0 \text{ для функцыі } f(x)=\frac{1}{x}\right)$, і пры большых (па модулю) значэннях аргумента.

Неабходна заўважыць, што гэты план мае прыкладны характар. Так, для знаходжання пунктаў перасячэння з воссю абсцыс трэба рашыць ураўненне $f(x)=0$, чаго мы не ўмеем рабіць нават у выпадку, калі $f(x)$, напрыклад, мнагачлен пятай ступені. (Існуюць, праўда, метады, якія ў многіх выпадках дазваляюць знайсці лік каранёў такога ўраўнення і самі карані з любой дакладнасцю.) Таму часта той ці іншы этап даследавання прыходзіцца апускаць. Аднак па магчымасці ў ходзе даследавання функцый пажадана прытрымлівацца гэтай схемы.

Найбольш цяжкім этапам даследавання з'яўляецца, як правіла, пошук прамежкаў узрастання (убывання), пунктаў экстрэмуму. У наступным раздзеле вы пазнаёміцеся з агульнымі метадамі рашэння гэтых задач, заснаванымі на прымяненні метадаў матэматычнага аналізу.

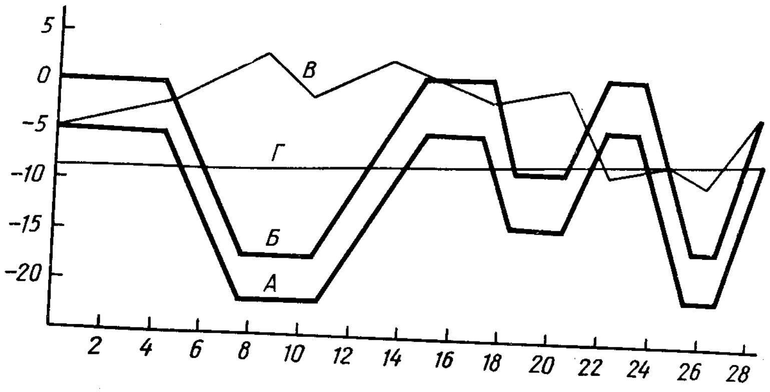
▽ Вертыкальныя прамыя, да якіх неабмежавана прыбліжаецца графік функцыі $f$ (напрыклад, прамая $x=0$ для функцыі $f(x)=\frac{1}{x}$ або прамыя $x=\pm 10$ для графіка функцыі, паказанага на рысунку 53), называюць *вертыкальнымі асімптотамі.*

Часцей за ўсё графік мае вертыкальную асімптоту $x=a$ ў выпадку, калі выраз, які задае дадзеную функцыю, мае від дробу, назоўнік якога ператвараецца ў нуль у пункце $a$, а лічнік не ператвараецца. Напрыклад, графік функцыі $f(x)=\frac{1}{x}$ мае вертыкальную асімптоту $x=0$. Для графіка функцыі $f(x)=\operatorname{tg} x$ вертыкальнымі асімптотамі з'яўляюцца прамыя $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, дзе $n\in \mathbf{Z}$.

Калі графік функцыі неабмежавана прыбліжаецца да некаторай гарызантальнай (у выпадку функцыі $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ гэта прамая $y=0$, гл. рыс. 55) або нахіленай (прамая $y=x$ для графіка функцыі $f(x)=x+\frac{1}{x}$, гл. рыс. 32) прамой пры неабмежаваным узрастанні (па модулю) $x$, то такую прамую называюць *гарызантальнай* (адпаведна *нахіленай*) *асімптотай.* ▲

**3. «Чытанне» графікаў.** У большасці разабраных вышэй прыкладаў і задач на пабудаванне графікаў функцый вы сустракаліся з такой сітуацыяй: функцыя зададзена формулай, патрабуецца даследаваць яе ўласцівасці і пабудаваць графік $f$. Больш значны практычны інтарэс мае другая задача: зададзен графік $f$,



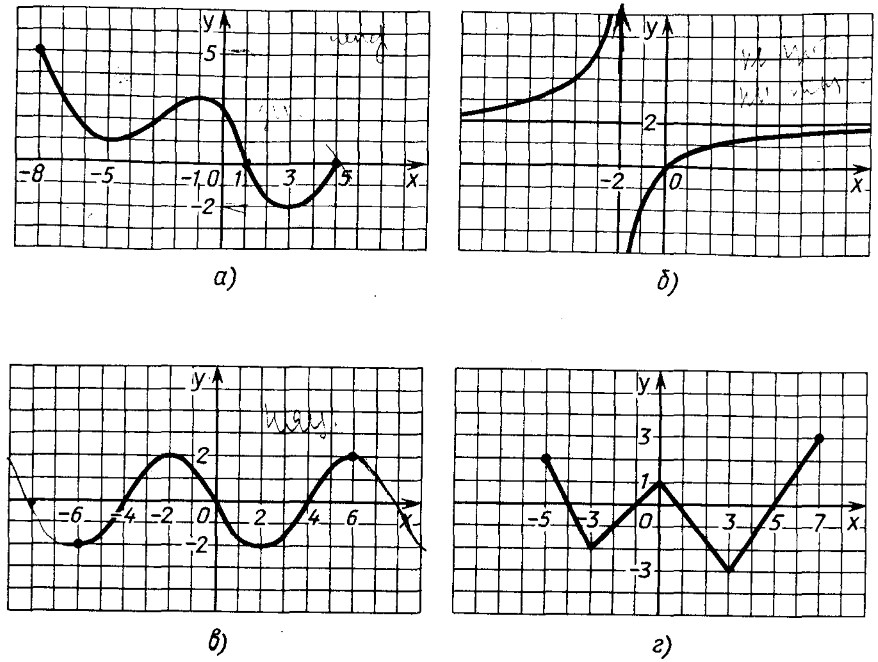



Рыс. 56

пры дапамозе якога патрабуецца пералічыць асноўныя ўласцівасці гэтай функцыі.

Падобныя задачы часта рашаюцца ў ходзе эксперыментальных даследаванняў. Пабудаванне графікаў пры гэтым ажыццяўляецца рознымі метадамі. Напрыклад, па пунктах, знойдзеных эксперыментальна. Існуюць таксама шматлікія самапісцы. Гэта, напрыклад, асцылографы, на экранах якіх электрычныя ваганні пераўтвараюцца ў наглядныя графічныя відарысы. Іншым прыкладам прылады, якая дазваляе атрымаць нагляднае графічнае апісанне, з'яўляецца кардыёграф; «прачытваючы» атрыманую з яго дапамогай кардыяграму, урачы робяць вывады аб стане сардэчнай дзейнасці.

З даволі тыпічным прыкладам цяжкасцей, якія ўзнікаюць пры даследаванні рэальных працэсаў, для апісання якіх яшчэ не створаны дакладныя тэорыі, вы можаце пазнаёміцца, разгледзеўшы рысунак 56. Тут прыведзены графікі сярэднясутачнага ходу тэмператур па Маскоўскай вобласці ў лютым 1974 г. Тоўстай рысай паказаны «тэарэтычныя крывыя» *А* і *Б*, што фіксуюць рэзультаты доўгатэрміновага прагнозу (паколькі прагноз даецца з дакладнасцю да 5°, крывых дзве). «Чытаючы» гэты графік, мы знаходзім, напрыклад, што дапускаліся тры «хвалі холаду» (у перыяд з 4 па 10, з 17 па 19 і з 23 па 26 лютага). Дапускалася таксама адсутнасць адліг і ў цэлым халоднае (да —17... —22 °С) надвор'е. Аднак на самай справе (графік фактычнага ходу тэмператур паказан тонкай лініяй *В*) тэмпература была вышэй за норму на 5—10° (кліматычная норма, якая з'яўляецца рэзультатам шматгадовых назіранняў, зададзена лініяй *Г*), у перыяд з 4 па 8 лютага было пацяпленне, а не пахаладанне і г. д. Гэтыя і іншыя звесткі аб прагнозе і рэальнай карціне вы можаце атрымаць, «чытаючы» графікі, прыведзеныя на рысунку 56.



Рыс. 57

### *Практыкаванні*

**93.** Правядзіце па агульнай схеме даследаванне функцыі, зададзенай графікам (рыс. 57).

**94.** Пабудуйце графік функцыі $f$, калі вядомыя яе ўласцівасці (гл. табліцу):

| | Уласцівасць функцыі | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Вобласць вызначэння<br>Вобласць значэнняў | $[-6;\ 6]$<br>$[-2;\ 5]$ | $[-5;\ 4]$<br>$[0;\ 6]$ | $[-4;\ 4]$<br>$[-3;\ 6]$ | $[-5;\ 3]$<br>$[0;\ 5]$ |
| 2 | Пункты перасячэння графіка:<br>а) з воссю $Ox$<br>б) з воссю $Oy$ | $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ 0)$<br>$C(0;\ 2{,}5)$ | $O(0;\ 0)$ | $A(-4;\ 0)$, $B(-1;\ 0)$, $C(2{,}5;\ 0)$<br>$D(0;\ -2)$ | $A(3;\ 0)$<br>$B(0;\ 4{,}5)$ |



| | Уласцівасць функцыі | а) | б) | в) | г) |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | Прамежкі знакапастаянства:<br>а) $f(x)>0$<br>б) $f(x)<0$ | $[-6;\ -4)$, $(-2;\ 6]$<br>$(-4;\ -2)$ | $[-5;\ 0)$, $(0;\ 4]$<br>— | $(-4;\ -1)$, $(2{,}5;\ 4)$<br>$(-1;\ 2{,}5)$ | $[-5;\ 3)$<br>— |
| 4 | Прамежкі:<br>а) узрастання<br>б) убывання | $[-3;\ 1]$, $[4;\ 6]$<br>$[-6;\ -3]$, $[1;\ 4]$ | $[-5;\ -2]$, $[0;\ 4]$<br>$[-2;\ 0]$ | $[-4;\ -2]$, $[1;\ 4]$<br>$[-2;\ 1]$ | $[-3;\ 1]$<br>$[-5;\ -3]$, $[1;\ 3]$ |
| 5 | Пункты максімуму, максімум функцыі<br>Пункты мінімуму, мінімум функцыі | $1,\ f(1)=3$<br>$-3,\ f(-3)=-2$<br>$4,\ f(4)=1$ | $-2,\ f(-2)=2$<br>$0,\ f(0)=0$ | $-2,\ f(-2)=2$<br>$1,\ f(1)=-3$ | $1,\ f(1)=5$<br>$-3,\ f(-3)=2$ |
| 6 | Дадатковыя пункты графіка | $f(-6)=3$<br>$f(6)=5$ | $f(-5)=0{,}5$<br>$f(4)=6$ | $f(4)=6$ | $f(-5)=3$ |

Правядзіце па агульнай схеме даследаванне кожнай з функцый і пабудуйце яе графік (95—97).

**95.** а) $f(x)=5-2x$; в) $f(x)=3-2x-x^2$;
б) $f(x)=3x-2$; г) $f(x)=x^2-3x+2$.

**96.** а) $f(x)=\frac{1}{x}-2$; б) $f(x)=-(x-3)^4$;
в) $f(x)=\frac{1}{x+2}$; г) $f(x)=x^3-1$.

**97.** а) $f(x)=\sqrt{x-3}$; б) $f(x)=4x-x^2$;
в) $f(x)=\sqrt{x+1}$; г) $f(x)=4-x^2$.

Правядзіце па агульнай схеме даследаванне кожнай з функцый і пабудуйце яе графік (98—99).

**98.** а) $f(x)=x^4+4x^2$; б) $f(x)=1-\sqrt{x+4}$;
в) $f(x)=x^3+x$; г) $f(x)=\sqrt{x-2}-2$.

**99.** а) $f(x)=x^2-2|x|+1$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$;
в) $f(x)=|x|-x^2$; г) $f(x)=\frac{2x+1}{x}$.

## 7. Уласцівасці трыганаметрычных функцый. Гарманічныя ваганні

**1. Даследаванне трыганаметрычных функцый.** Уласцівасці вывучаемых функцый зручна запісваць згодна з прыведзенай у папярэднім пункце схемай. Звядзём ужо вядомыя вам уласцівасці функцый сінус, косінус, тангенс і катангенс у табліцу (гл. с. 55). (Усюды дапускаецца, што $n \in \boldsymbol{Z}$.)

У табліцы прынята наступная нумарацыя ўласцівасцей функцыі $f$:

1.1 — вобласць вызначэння;
1.2 — вобласць значэнняў;
2.1 — цотнасць (няцотнасць);
2.2 — найменшы дадатны перыяд;
3.1 — каардынаты пунктаў перасячэння графіка $f$ з воссю $Ox$;
3.2 — каардынаты пунктаў перасячэння графіка $f$ з воссю $Oy$;
4.1 — прамежкі, на якіх $f$ прымае дадатныя значэнні;
4.2 — прамежкі, на якіх $f$ прымае адмоўныя значэнні;
5.1 — прамежкі ўзрастання;
5.2 — прамежкі ўбывання;
6.1 — пункты мінімуму;
6.2 — мінімумы функцыі;
6.3 — пункты максімуму;
6.4 — максімумы функцыі.

Уласцівасці трыганаметрычных функцый часта прымяняюцца пры рашэнні задач.

○ Прыклад 1. Размесцім у парадку ўзрастання лікі $\sin(-1)$, $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$.

Карыстаючыся формуламі прывядзення, запішам гэтыя лікі ў такім выглядзе, каб значэнні аргумента належалі аднаму з прамежкаў узрастання сінуса — адрэзку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

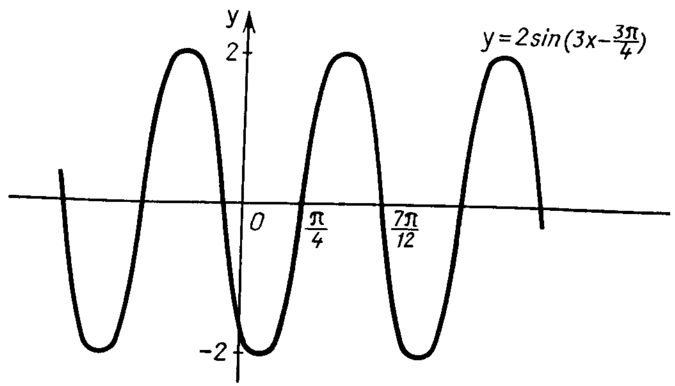
$$\sin 2=\sin(\pi-2),\quad \sin 3=\sin(\pi-3),\quad \sin 4=\sin(\pi-4).$$



Відавочна, што

$$-\frac{\pi}{2}<-1<\pi-4<\pi-3<1<\pi-2<\frac{\pi}{2},$$

| | Функцыя | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $f(x)=\sin x$ | $f(x)=\cos x$ | $f(x)=\operatorname{tg} x$ | $f(x)=\operatorname{ctg} x$ |
| 1.1 | $\boldsymbol{R}$ | $\boldsymbol{R}$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ | $(\pi n; \pi+\pi n)$ |
| 1.2 | $[-1; 1]$ | $[-1; 1]$ | $\boldsymbol{R}$ | $\boldsymbol{R}$ |
| 2.1 | Няцотная | Цотная | Няцотная | Няцотная |
| 2.2 | $2\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ | $\pi$ |
| 3.1 | $(\pi n; 0)$ | $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; 0\right)$ | $(\pi n; 0)$ | $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; 0\right)$ |
| 3.2 | $(0; 0)$ | $(0; 1)$ | $(0; 0)$ | Няма |
| 4.1 | $(2\pi n; \pi+2\pi n)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ | $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ | $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ |
| 4.2 | $(-\pi+2\pi n; 2\pi n)$ | $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$ |
| 5.1 | $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ | $[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ | Няма |
| 5.2 | $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$ | $[2\pi n; \pi+2\pi n]$ | Няма | $(\pi n; \pi+\pi n)$ |
| 6.1 | $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ | $\pi+2\pi n$ | Няма | Няма |
| 6.2 | $-1$ | $-1$ | Няма | Няма |
| 6.3 | $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ | $2\pi n$ | Няма | Няма |
| 6.4 | $1$ | $1$ | Няма | Няма |




Рыс. 58

таму

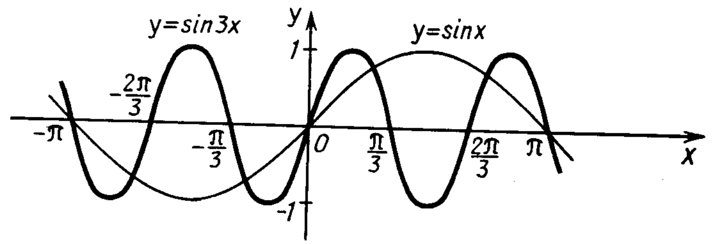
$$\sin(-1) < \sin(\pi-4) < \sin(\pi-3) < \sin 1 < \sin(\pi-2).$$

Такім чынам, $\sin(-1) < \sin 4 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$. ●

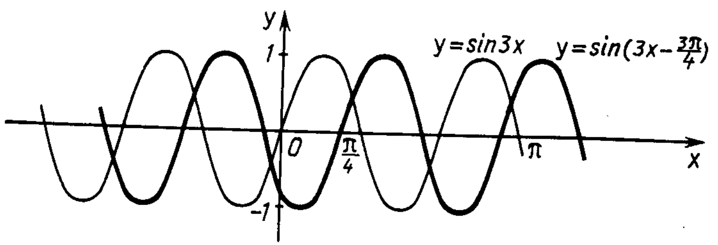
Разгледзім графік функцыі $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ (рыс. 58). Ён атрымліваецца пры дапамозе наступнай паслядоўнасці пераўтварэнняў:

а) сціска́ннем графіка функцыі $y=\sin x$ у 3 разы ўздоўж восі абсцыс атрымліваем графік функцыі $y=\sin 3x$ (рыс. 59);

б) пераносам графіка функцыі $y=\sin 3x$ на вектар $\left(\frac{\pi}{4};\ 0\right)$

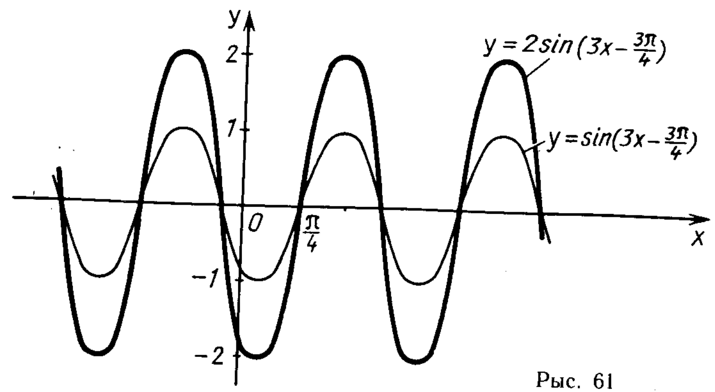



Рыс. 59




Рыс. 60






Рыс. 61

атрымліваем графік функцыі $y=\sin 3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, г. зн. $y=\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ (рыс. 60);

в) расцяжэннем графіка $y=\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ у 2 разы ўздоўж восі ардынат атрымліваем графік функцыі $y=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$ (рыс. 61).

Пры пераўтварэннях, вывучаных у пункце 3, «форма» крывой захоўваецца (гэтак жа як пры рухах і пераўтварэннях падобнасці). Таму сінусоідай называюць не толькі графік сінуса, але і любую крывую, атрыманую з яго пры дапамозе сціскання ў (расцяжэнняў) уздоўж восей і наступных рухаў або пераўтварэнняў падобнасці. Гэта ж заўвага справядлівая для іншых крывых, напрыклад парабалы або гіпербалы.

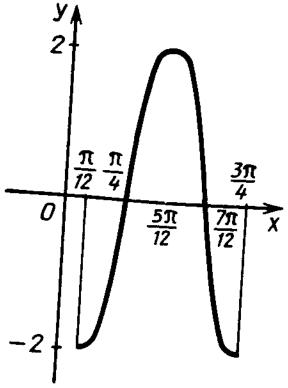
Тыя абставіны, што ўласцівасці функцый віду $f(x)=A\sin(kx+b)$ і $f(x)=A\cos(kx+b)$ аналагічныя ўласцівасцям сінуса (або косінуса), дазваляюць параўнальна хутка правесці даследаванне такіх функцый: галоўнае — знайсці іх перыяд і пункты, у якіх значэнні роўныя 0 і $\pm A$.

○ П р ы к л а д 2. Даследуем функцыю

$$f(x)=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

і пабудуем яе графік.

Перыяд функцыі $f$ роўны $\frac{2\pi}{3}$ (гл. п. 4). Сінус ператвараецца ў нуль у пунктах віду $\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, таму $f(x)=0$ пры $3x-\frac{3\pi}{4}=\pi n$, г. зн. пры $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. Затым, рашаючы ўраўненні $f(x)=-2$ і $f(x)=2$, атрымаем $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ пры $3x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, адкуль $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; $\sin\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right)=1$ пры




Рыс. 62

$3x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, адкуль $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Адзначым атрыманыя пункты на восі абсцыс. Дастаткова разгледзець адрэзак, даўжыня якога роўна перыяду. У дадзеным выпадку зручна ўзяць адрэзак $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}\right]$, левы канец якога з'яўляецца пунктам мінімуму функцыі (рыс. 62). Далей рысуем графік функцыі $f$, якая ўзрастае ад $-2$ да 2 на адрэзку $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right]$ і ўбывае ад 2 да $-2$ на адрэзку $\left[\frac{5\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Пры гэтым графік павінен перасякаць вось абсцыс у пунктах $\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ і $\left(\frac{7\pi}{12}; 0\right)$. Эскіз графіка функцыі $f$ на ўсёй лікавай прамой атрымліваецца з графіка рысунка 62 зрухамі на $\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, уздоўж восі абсцыс (гл. рыс. 58). ●

**2. Гарманічныя ваганні.** Велічыні, якія мяняюцца згодна з законам

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

або

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \qquad (2)$$

адыгрываюць важную ролю ў фізіцы. Па такому закону мяняецца, напрыклад, каардыната шарыка, падвешанага на спружыне (гл. рыс. 149). Гавораць, што шарык выконвае гарманічныя ваганні.

Функцыю (2) таксама можна запісаць у выглядзе (1):

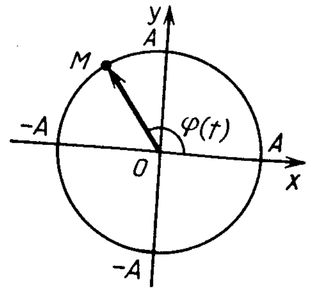
$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Параметры $A$, $\omega$ і $\varphi$, якія поўнасцю вызначаюць ваганне (1), маюць спецыяльныя назвы: $A$ называюць *амплітудай вагання*, $\omega$ — *цыклічнай* (або кругавой) *частатой вагання*, $\varphi$ — *пачатковай фазай вагання* (звычайна бяруць $\varphi \in [0; 2\pi)$). Перыяд функцый $A\sin(\omega t + \varphi)$ і $A\cos(\omega t + \varphi)$, роўны $\frac{2\pi}{\omega}$, называюць *перыядам гарманічнага вагання*.

Уласцівасці функцый (1) і (2) зручна праілюстраваць на наступным прыкладзе з механікі. Няхай пункт $M$ рухаецца раўнамерна па акружнасці радыуса $R = A$ з вуглавой скорасцю $\omega$ (пры $\omega > 0$ вярчэнне супраць гадзіннікавай стрэлкі, а пры $\omega < 0$ — па гадзіннікавай стрэлцы), прычым у пачатковы момант часу $t = 0$ вектар $\overrightarrow{OM}$ складае вугал $\varphi$ з дадатным напрамкам



восі абсцыс (рыс. 63). Разгледзім дзве наступныя функцыі ад $t$ — каардынаты праекцый пункта на восі абсцыс і ардынат — функцыі $x(t)$ і $y(t)$.




Рыс. 63

У момант часу $t$ вектар $\overrightarrow{OM}$ складае з дадатным напрамкам восі $Ox$ вугал $\varphi(t)$, пры гэтым $\varphi(t) = \varphi + \omega t$ згодна з законам раўнамернага руху па акружнасці. Па азначэнню функцый сінус і косінус

$$x(t) = A\cos\varphi(t), \text{ г. зн. } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$
$$y(t) = A\sin\varphi(t), \text{ г. зн. } y(t) = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Вывучым уласцівасці гэтых функцый, абапіраючыся на кінематычныя меркаванні. Іх перыяд роўны, відавочна, часу $T$, за які пункт робіць адзін абарот. Даўжыня акружнасці роўна $2\pi A$, а лінейная скорасць $v$ пункта роўна $\omega A$, таму $T = \frac{2\pi A}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$.

Разгледзім адзін з момантаў часу $t_0$, у які пункт $M$ займае крайняе правае становішча. Тады $x(t_0) = A$, $y(t_0) = 0$. Пачынаючы з гэтага моманту часу функцыя $x(t)$ будзе папераменна ўбываць ад $A$ да $-A$ на першай палавіне перыяду і ўзрастаць ад $-A$ да $A$ на другой палавіне перыяду. Пры гэтым пункты максімуму функцыі $x(t)$ — гэта тыя моманты часу, калі пункт займае крайняе правае становішча; пункты мінімуму адпавядаюць крайняму леваму становішчу, а нулі — верхняму і ніжняму становішчам.

Аналагічнымі ўласцівасцямі валодае і функцыя $y(t)$; яе пункты максімуму і мінімуму адпавядаюць верхняму і ніжняму становішчам пункта на акружнасці, а нулі — праваму і леваму становішчам.

Адзначым, што пры $A = 1$, $\omega = 1$ і $\varphi = 0$ функцыі $x(t)$ і $y(t)$ роўныя адпаведна $\cos t$ і $\sin t$. Праверце самастойна, што вядомыя вам уласцівасці гэтых функцый лёгка атрымаць, разглядаючы адпаведны рух пункта па адзінкавай акружнасці.

### *Практыкаванні*

**100.** Карыстаючыся ўласцівасцямі трыганаметрычных функцый, замяніце выраз роўным яму значэннем той жа трыганаметрычнай функцыі найменшага дадатнага аргумента:

а) $\operatorname{tg}\frac{18\pi}{5}$, $\sin\frac{28\pi}{3}$; б) $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{5}\right)$;

в) $\sin\left(-\frac{14\pi}{5}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{8}$; г) $\cos\frac{20\pi}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{35\pi}{9}$.

**101.** Знайдзіце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў функцыі:

а) $f(x)=3\cos 2x-1$; б) $f(x)=2-\operatorname{ctg} 3x$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $f(x)=1+0{,}5\sin\frac{x}{2}$.

**102.** Знайдзіце прамежкі знакапастаянства і нулі функцыі:

а) $f(x)=-\sin 3x$; б) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{2x}{3}$;

в) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$; г) $f(x)=\operatorname{ctg} 2x$.

**103.** Знайдзіце прамежкі ўзрастання, убывання, пункты максімуму і мінімуму функцыі:

а) $f(x)=4\cos 3x$; б) $f(x)=0{,}5\operatorname{ctg}\frac{x}{4}$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $f(x)=0{,}2\sin 4x$.

Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік (104—105).

**104.** а) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; б) $f(x)=-2\sin 2x$;

в) $f(x)=-1{,}5\cos 3x$; г) $f(x)=3\sin\frac{x}{2}$.

**105.** а) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$; б) $f(x)=-3\cos\frac{3x}{2}$;

в) $f(x)=-2\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; г) $f(x)=2{,}5\sin\frac{4x}{3}$.

**106.** Каардыната (вымераная ў сантыметрах) цела, якое рухаецца, змяняецца па ўказанаму закону. Знайдзіце амплітуду, перыяд, частату вагання. Вылічыце каардынату цела ў момант часу $t_1$, калі:

а) $x(t)=3{,}5\cos 4\pi t$, $t_1=\frac{1}{12}$ с;

б) $x(t)=5\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$, $t_1=4{,}5$ с;

в) $x(t)=1{,}5\cos 6\pi t$, $t_1=1\frac{1}{3}$ с;

г) $x(t)=0{,}5\cos\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $t_1=8$ с.

**107.** Знайдзіце амплітуду, перыяд, частату сілы току, калі яна змяняецца па закону (сіла току вымерана ў амперах, час — у секундах):

а) $I(t)=0{,}25\sin 50\pi t$; б) $I(t)=5\sin 20\pi t$;
в) $I(t)=0{,}5\sin 10\pi t$; г) $I(t)=3\sin 30\pi t$.

**108.** Знайдзіце амплітуду, перыяд і частату напружання, калі яно змяняецца па закону (напружанне вымерана ў вольтах, час — у секундах):

а) $U(t)=220\cos 60\pi t$; б) $U(t)=110\cos 30\pi t$;
в) $U(t)=360\cos 20\pi t$; г) $U(t)=180\cos 45\pi t$.



**109.** Размясціце ў парадку ўзрастання лікі:

а) $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 9$, $\cos(-12{,}5)$;
б) $\operatorname{tg}(-8)$, $\operatorname{tg} 1{,}3$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 16$;
в) $\sin 6{,}7$, $\sin 10{,}5$, $\sin(-7)$, $\sin 20{,}5$;
г) $\operatorname{ctg} 3{,}5$, $\operatorname{ctg}(-9)$, $\operatorname{ctg} 5$, $\operatorname{ctg} 15$.

**110.** Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $y=\frac{1}{1-\sin x}$; б) $y=\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}$;

в) $y=\frac{1}{\cos x-1}$; г) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$.

**111.** Знайдзіце вобласць значэнняў функцыі:

а) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$; б) $y=\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

в) $y=\sqrt{1-\cos 4x}$; г) $y=\frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$.

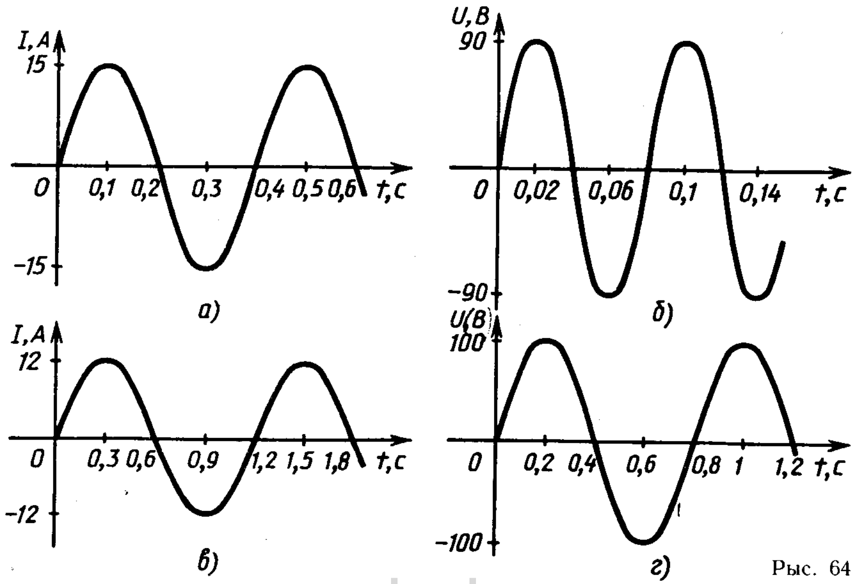
Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік (112—113).

**112.** а) $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

в) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x)=1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

**113.** а) $f(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x)=4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)$.




Рыс. 64

**114.** Па графіку, паказанаму на рысунку 64, вызначце амплітуду сілы току (або напружання), перыяд вагання. Запішыце закон залежнасці сілы току (або напружання) ад часу.

**115.** У які бліжэйшы момант часу $t$ $(t>0)$, лічачы ад пачатку руху, зрух пункта, які выконвае гарманічныя ваганні па закону $x(t)=5\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$:

а) максімальны; б) роўны 2,5;
в) роўны 0; г) роўны $-5$?

## § 3. РАШЭННЕ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫХ УРАЎНЕННЯЎ І НЯРОЎНАСЦЕЙ

### 8. Арксінус, арккосінус і арктангенс

**1. Тэарэма аб корані.** Сфармулюем важнае сцверджанне, якім зручна карыстацца пры рашэнні ўраўненняў.

Тэарэма *(аб корані)*. ***Няхай функцыя $f$ узрастае (або ўбывае) на прамежку $I$, лік $a$ — любое са значэнняў, якія прымае $f$ на гэтым прамежку. Тады ўраўненне $f(x)=a$ мае адзіны корань у прамежку $I$.***

Доказ. Разгледзім узрастаючую функцыю $f$ (у выпадку ўбываючай функцыі разважанні аналагічныя). Па ўмове ў прамежку $I$ існуе такі лік $b$, што $f(b)=a$. Пакажам, што $b$ — адзіны корань ураўнення $f(x)=a$.

Дапусцім, што на прамежку $I$ ёсць яшчэ лік $c\neq b$, такі, што $f(c)=a$. Тады або $c<b$, або $c>b$. Але функцыя $f$ узрастае на прамежку $I$, таму адпаведна або $f(c)<f(b)$, або $f(c)>f(b)$. Гэта супярэчыць роўнасці $f(c)=f(b)=a$. Значыць, зробленае дапушчэнне няправільнае і ў прамежку $I$, акрамя ліку $b$, іншых каранёў ураўнення $f(x)=a$ няма.

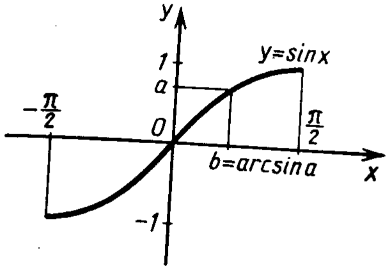
○ Прыклад 1. Рэшым ураўненне $x^3+x=2$.

Функцыя $f(x)=x^3+x$ узрастае на $\boldsymbol{R}$ (гэта сума дзвюх узрастаючых функцый). Таму ўраўненне $f(x)=2$ мае не больш за адзін корань. Лёгка заўважыць, што коранем з'яўляецца $x=1$. ●

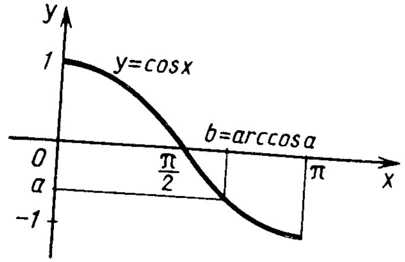
**2. Арксінус.** Як вы ведаеце, функцыя сінус узрастае на адрэзку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і прымае ўсе значэнні ад $-1$ да 1. Значыць, па тэарэме аб корані для любога ліку $a$, такога, што $|a|\leqslant 1$, у прамежку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ існуе адзіны корань $b$ ураўнення $\sin x=a$. Гэты лік $b$ называюць арксінусам ліку $a$ і абазначаюць $\arcsin a$ (рыс. 65).

Азначэнне. ***Арксінусам* ліку $a$ называецца такі лік з адрэзка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, сінус якога роўны $a$.**






Рыс. 65




Рыс. 66

○ Прыклад 2. Знойдзем $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, паколькі $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Прыклад 3. Знойдзем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Лік $\left(\text{з прамежку }\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$, сінус якога ёсць $-\frac{1}{2}$, роўны $-\frac{\pi}{6}$. Таму $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$. ●

**3. Арккосінус.** Функцыя косінус убывае на адрэзку $[0;\pi]$ і прымае ўсе значэнні ад $-1$ да 1. Таму для любога ліку $a$, такога, што $|a|\leqslant 1$, на адрэзку $[0;\pi]$ існуе адзіны корань $b$ ураўнення $\cos x=a$. Гэты лік $b$ называюць арккосінусам ліку $a$ і абазначаюць $\arccos a$ (рыс. 66).

Азначэнне. ***Арккосінусам* ліку $a$ называецца такі лік з адрэзка $[0;\pi]$, косінус якога роўны $a$.**

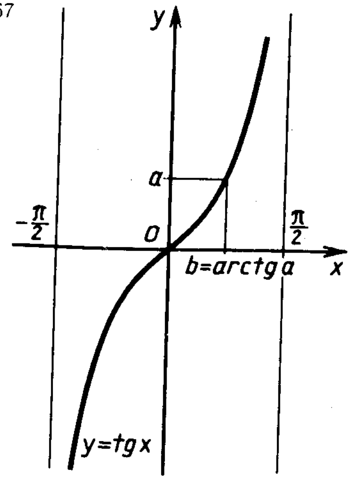
Прыклад 4. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, паколькі $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{6}\in[0;\pi]$.

Прыклад 5. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, паколькі $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{3\pi}{4}\in[0;\pi]$. ●

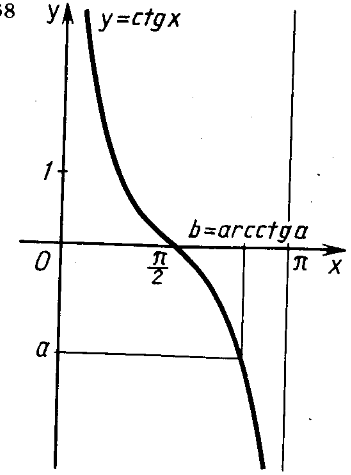
**4. Арктангенс.** На інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функцыя тангенс узрастае і прымае ўсе значэнні з $\boldsymbol{R}$. Таму для любога ліку $a$ ў інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ існуе адзіны корань $b$ ураўнення $\operatorname{tg}x=a$. Гэты лік $b$ называюць арктангенсам ліку $a$ і абазначаюць $\operatorname{arctg}a$ (рыс. 67).

Азначэнне. ***Арктангенсам* ліку $a$ называецца такі лік з інтэрвалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якога роўны $a$.**

Рыс. 67




Рыс. 68




Прыклад 6. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, паколькі $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ і $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Прыклад 7. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, паколькі $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ і $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. ●

**5. Арккатангенс.** Функцыя катангенс на інтэрвале $(0; \pi)$ убывае і прымае ўсе значэнні з $\boldsymbol{R}$. Таму для любога ліку $a$ ў інтэрвале $(0; \pi)$ існуе адзіны корань $b$ ураўнення $\operatorname{ctg} x = a$. Гэты лік $b$ называюць арккатангенсам ліку $a$ і абазначаюць $\operatorname{arcctg} a$ (рыс. 68).

Азначэнне. ***Арккатангенсам* лiку *a* называецца такі лік з інтэрвалу $(0; \pi)$, катангенс якога роўны *a*.**

Прыклад 8. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, паколькі $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$.

Прыклад 9. $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, паколькі $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ і $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$. ●

### *Практыкаванні*

Колькі каранёў, якія належаць дадзенаму прамежку, мае кожнае з ураўненняў (116—117)?

**116.** а) $x^7 = 3$, $x \in (-\infty; \infty)$; б) $\frac{3}{x-1} = -5$, $x \in (-\infty; 1)$;
в) $x^6 = 4$, $x \in (-\infty; 0]$; г) $\frac{5}{x+2} = 2$, $x \in (-2; \infty)$.



**117.** а) $(x-3)^3 = -4$, $x \in (-\infty; \infty)$; в) $(x+2)^4 = 5$, $x \in [-2; \infty)$;
б) $2\sin x = 1{,}5$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $0{,}5\cos x = -\frac{1}{4}$, $x \in [0; \pi]$.

Адзначце на адзінкавай акружнасці пункты $P_t$, для якіх адпаведнае значэнне $t$ задавальняе дадзенай роўнасці. Знайдзіце значэнне $t$, якое належыць указанаму прамежку (118—120).

**118.** а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\sin t = -\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
в) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\sin t = 1$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

**119.** а) $\cos t = -\frac{1}{2}$, $[0; \pi]$; б) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0; \pi]$;
в) $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$; г) $\cos t = 0$, $[0; \pi]$.

**120.** а) $\operatorname{tg} t = -1$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$, $(0; \pi)$;
в) $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg} t = -1$, $(0; \pi)$.

Вылічыце (121—123).

**121.** а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
в) $\arcsin 1$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**122.** а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arccos 1$.

**123.** а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$;
в) $\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Ці маюць сэнс выразы (124—125)?

**124.** а) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$; б) $\arccos\sqrt{5}$;
в) $\arcsin 1{,}5$; г) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.

**125.** а) $\arccos \pi$; б) $\arcsin(3-\sqrt{20})$;
в) $\arccos(-\sqrt{3})$; г) $\arcsin\frac{2}{7}$.

Знайдзіце значэнні выразаў (126—128).

**126.** а) $\arcsin 0 + \arccos 0$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$;

в) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arcsin(-1) + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**127.** а) $\arccos(-0{,}5) + \arcsin(-0{,}5)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**128.** а) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

**129.** Параўнайце лікі:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ і $\arcsin 1$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ і $\arcsin\frac{1}{2}$.

---

**130.** Пры дапамозе калькулятара або табліц знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin 0{,}3010$; $\operatorname{arctg} 2{,}3$;
б) $\arccos 0{,}6081$; $\operatorname{arctg} 0{,}3541$;
в) $\arcsin 0{,}7801$; $\arccos 0{,}8771$;
г) $\operatorname{arctg} 10$; $\arcsin 0{,}4303$.

**131.** Вылічыце:

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$;

в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$;

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**132.** Дакажыце, што для любых лікаў $x_1$ і $x_2$ з прамежку $[-1; 1]$ з няроўнасці $x_1 < x_2$ вынікае няроўнасць:

а) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; б) $\arccos x_1 > \arccos x_2$.



**133.** Дакажыце, што для любых лікаў $x_1$ і $x_2$ з няроўнасці $x_1 < x_2$ вынікае няроўнасць:

а) $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$; б) $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$.

Размясціце лікі ў парадку ўзрастання (134—135).

**134.** а) $\arcsin\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(-0{,}3)$, $\arcsin 0{,}9$;

б) $\arcsin(-0{,}5)$, $\arcsin(-0{,}7)$, $\arcsin\frac{\pi}{8}$;

в) $\arccos 0{,}4$, $\arccos(-0{,}2)$, $\arccos(-0{,}8)$;

г) $\arccos 0{,}9$, $\arccos(-0{,}6)$, $\arccos\frac{\pi}{5}$.

**135.** а) $\operatorname{arctg} 100$, $\operatorname{arctg}(-5)$, $\operatorname{arctg} 0{,}7$;
б) $\operatorname{arcctg} 1{,}2$, $\operatorname{arcctg} \pi$, $\operatorname{arcctg}(-5)$;
в) $\operatorname{arctg}(-95)$, $\operatorname{arctg} 3{,}4$, $\operatorname{arctg} 17$;
г) $\operatorname{arcctg}(-7)$, $\operatorname{arcctg}(-2{,}5)$, $\operatorname{arcctg} 1{,}4$.

## 9. Рашэнне найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў

**1. Ураўненне $\cos t = a$.** Відавочна, што калі $|a| > 1$, то ўраўненне

$$\cos t = a \qquad (1)$$

не мае рашэнняў, паколькі $|\cos t| \leqslant 1$ для любога $t$.

Няхай $|a| \leqslant 1$. Трэба знайсці ўсе такія лікі $t$, што $\cos t = a$. На адрэзку $[0; \pi]$ існуе дакладна адно рашэнне ўраўнення (1) — гэта лік $\arccos a$.

Косінус — цотная функцыя, і, значыць, на адрэзку $[-\pi; 0]$ ураўненне (1) таксама мае дакладна адно рашэнне — лік $-\arccos a$. Такім чынам, ураўненне $\cos t = a$ на адрэзку $[-\pi; \pi]$ даўжынёй $2\pi$ мае два рашэнні: $t = \pm\arccos a$ (якія супадаюць пры $a = 1$).

З прычыны перыядычнасці функцыі cos усе астатнія рашэнні адрозніваюцца ад гэтых на $2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), г. зн. формула каранёў ураўнення (1) такая:

$$\boldsymbol{t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.} \qquad (2)$$

(Звярніце ўвагу: гэтай формулай можна карыстацца толькі пры $|a| \leqslant 1$.)

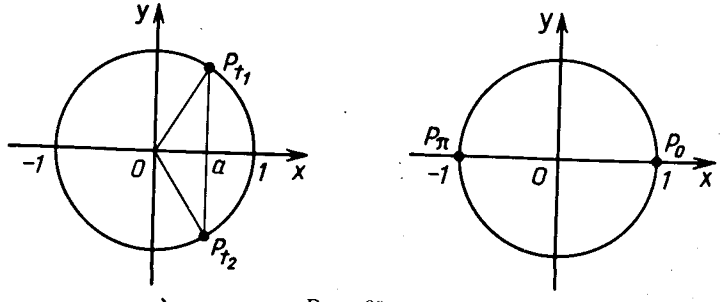
Рашэнне ўраўнення (1) можна праілюстраваць на адзінкавай акружнасці. Па азначэнню $\cos t$ — гэта абсцыса пункта $P_t$ адзінкавай акружнасці. Калі $|a| < 1$, то такіх пунктаў два (рыс. 69, *а*); калі ж $a = 1$ або $a = -1$, то адзін (рыс. 69, *б*).

Пры $a = 1$ лікі $\arccos a$ і $-\arccos a$ супадаюць (яны роўны нулю), таму рашэнні ўраўнення

$$\cos t = 1$$

прынята запісваць у выглядзе

$$t = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$




*а)* Рыс. 69 *б)*

Асобая форма запісу рашэнняў ураўнення (1) прынята таксама для $a=-1$ і $a=0$:

$$\cos t=-1 \text{ пры } t=\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos t=0 \text{ пры } t=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

○ Прыклад 1. Рэшым ураўненне $\cos x=\frac{1}{2}$.

Па формуле (2)

$$x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Паколькі $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, прыходзім да адказу

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Прыклад 2. Рэшым ураўненне $\cos x=-0{,}2756$.
Па формуле (2)

$$x=\pm\arccos(-0{,}2756)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Значэнне $\arccos(-0{,}2756)$ знаходзім з дапамогай калькулятара: яно прыбліжана роўна 1,8500. Такім чынам,

$$x=\pm x_0+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\ \text{дзе}\ x_0\approx 1{,}8500.$$

Прыклад 3. Рэшым ураўненне $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Па формуле (2)

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$$

г. зн.

$$2x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,$$

адкуль

$$x=\frac{\pi}{8}\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. ●$$



**2. Ураўненне $\sin t=a$.** Ураўненне

$$\sin t=a \tag{3}$$

не мае рашэнняў пры $|a|>1$, паколькі $|\sin t|\leqslant 1$ для любога $t$. Пры $|a|\leqslant 1$ на адрэзку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ураўненне (3) мае дакладна адно рашэнне $t_1=\arcsin a$. На прамежку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ функцыя sin убывае і прымае ўсе значэнні ад $-1$ да 1. Па тэарэме аб корані ўраўненне (3) мае і на гэтым адрэзку адзін корань. З рысунка 70, *а* відаць, што гэты корань ёсць лік $t_2$, роўны $\pi-\arcsin a$. Сапраўды, $\sin t_2=\sin(\pi-t_1)=\sin t_1=a$. Акрамя таго, паколькі $-\frac{\pi}{2}\leqslant t_1\leqslant\frac{\pi}{2}$, маем: $-\frac{\pi}{2}\leqslant -t_1\leqslant\frac{\pi}{2}$ і $\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-t_1\leqslant\leqslant\pi+\frac{\pi}{2}$, г. зн. лік $t_2$ належыць адрэзку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Такім чынам, ураўненне (3) на адрэзку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ мае два рашэнні: $t_1=\arcsin a$ і $t_2=\pi-\arcsin a$ (якія супадаюць пры $a=1$). Улічваючы, што перыяд сінуса роўны $2\pi$, атрымліваем такія формулы для запісу ўсіх рашэнняў ураўнення:

$$t=\arcsin a+2\pi n, \tag{4}$$

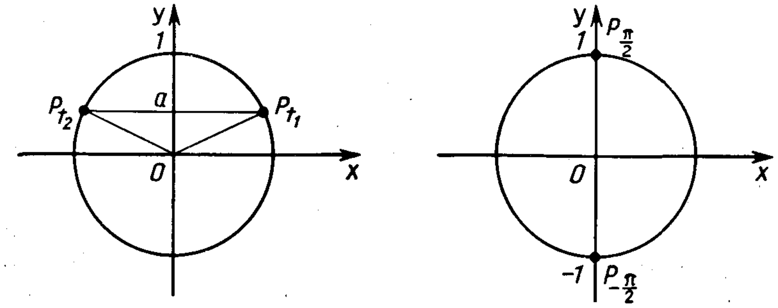
$$t=\pi-\arcsin a+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \tag{5}$$

Зручна рашэнні ўраўнення (3) запісваць не дзвюма, а адной формулай:

$$\boldsymbol{t=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z.} \tag{6}$$

Як няцяжка пераканацца, пры цотных $k=2n$ з формулы (6) знаходзім усе рашэнні, запісаныя формулай (4); пры няцотных $k=2n+1$ — рашэнні, якія запісваюцца формулай (5).

Рашэнне ўраўнення (3) зручна ілюстраваць на адзінкавай акружнасці. Па азначэнню $\sin t$ ёсць ардыната пункта $P_t$ адзінкавай акружнасці. Калі $|a|<1$, то такіх пунктаў два (гл. рыс. 70, *а*); пры $a=\pm1$ — адзін (гл. рыс. 70, *б*).




*а)* Рыс. 70 *б)*

Калі $a=1$, то лікі $\arcsin a$ і $\pi-\arcsin a$ супадаюць, таму рашэнне ўраўнення

$$\sin t=1$$

прынята запісваць так:

$$t=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Пры $a=-1$ і $a=0$ прыняты наступны запіс рашэнняў:

$$\sin t=-1,\ \text{калі}\ t=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z},$$
$$\sin t=0,\ \text{калі}\ t=\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

○ Прыклад 4. Рэшым ураўненне $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Па формуле (6)

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z},\ \text{г. зн.}$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Прыклад 5. Рэшым ураўненне $\sin x=0{,}3714$.
Згодна з формулай (6)

$$x=(-1)^n \arcsin 0{,}3714+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

З дапамогай калькулятара знаходзім $\arcsin 0{,}3714\approx 0{,}3805$.

Прыклад 6. Рэшым ураўненне $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Функцыя сінус няцотная. Таму

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле (6)

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}.$$

Паколькі $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, маем:

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,$$
$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}. \bullet$$

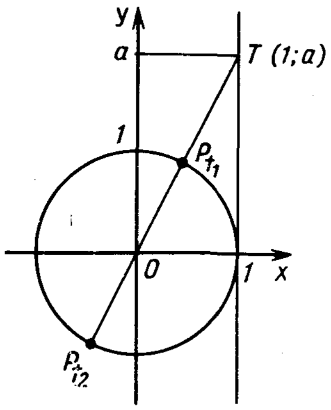
**3. Ураўненне $\operatorname{tg} t=a$.** Пры любым $a$ на інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ёсць роўна адзін такі лік $t$, што $\operatorname{tg} t=a$, — гэта $\operatorname{arctg} a$. Таму ўраўненне

$$\operatorname{tg} t=a \qquad (7)$$



мае на інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ даўжынёй $\pi$ адзіны корань. Функцыя тангенс мае перыяд $\pi$. Значыць, астатнія карані ўраўнення (7) адрозніваюцца ад знойдзенага на $\pi n$ ($n\in \mathbf{Z}$), г. зн.

$$t=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}. \qquad (8)$$



Рыс. 71

Рашэнне ўраўнення $\operatorname{tg} t=a$ зручна праілюстраваць пры дапамозе лініі тангенсаў (рыс. 71). Напомнім, што $\operatorname{tg} t$ — гэта ардыната пункта $T_t$ перасячэння прамой $OP_{t_1}$ з лініяй тангенсаў (гл. п. 1). Для любога ліку $a$ на лініі тангенсаў ёсць толькі адзін пункт з ардынатай $a$, гэта пункт $T(1;a)$. Прамая $OT$ перасякаецца з адзінкавай акружнасцю ў двух пунктах; пры гэтым інтэрвалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ адпавядае пункт $P_{t_1}$ правай паўакружнасці, такі, што $t_1=\operatorname{arctg} a$.

○ Прыклад 7. Рэшым ураўненне $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

Па формуле (8) знаходзім рашэнне $x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$, а паколькі $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, прыходзім да канчатковага адказу:

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Прыклад 8. Рэшым ураўненне $\operatorname{tg} x=5{,}177$.
З формулы (8) вынікае, што

$$x=\operatorname{arctg} 5{,}177+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

З дапамогай калькулятара знаходзім: $\operatorname{arctg} 5{,}177\approx 1{,}3800$.

Прыклад 9. Рэшым ураўненне $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$.

Гэта ўраўненне раўназначнае ўраўненню $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, якое рашаем з дапамогай формулы (8):

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}. \bullet$$

### *Практыкаванні*

Рашыце ўраўненні (136—143).

**136.** а) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x=-\frac{1}{2}$;

в) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x=-1$.

**137.** а) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; б) $\sqrt{2}\cos x-1=0$;

в) $2\cos x+\sqrt{2}=0$; г) $2\cos x-1=0$.

**138.** а) $\sin x=\frac{1}{2}$; б) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin x=-\frac{1}{2}$; г) $\sin x=-1$.

**139.** а) $\sqrt{2}\sin x+1=0$; б) $2\sin x+\sqrt{3}=0$;
в) $2\sin x-1=0$; г) $2\sin x+\sqrt{2}=0$.

**140.** а) $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x=1$; г) $\operatorname{tg} x=0$.

**141.** а) $\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$; б) $\operatorname{ctg} x+1=0$;
в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-1=0$; г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x-1=0$.

**142.** а) $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$;
в) $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$; г) $\cos 4x=0$.

**143.** а) $\sin x=-0{,}6$; б) $\operatorname{ctg} x=2{,}5$;
в) $\cos x=0{,}3$; г) $\operatorname{tg} x=-3{,}5$.

---

Рашыце ўраўненні (144—147).

**144.** а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{tg}(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;
в) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)=1$.

**145.** а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; б) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;
в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3$; г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$.

**146.** а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$;
в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

**147.** а) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}=1$; в) $\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{4}$;
г) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**148.** Для кожнай з функцый $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ і $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ знайдзіце каардынаты агульных пунктаў яе графіка з прамой:



а) $x=4{,}5\pi$; б) $y=-1$; в) $y=1$; г) $y=0$.

**149.** Рашыце ўраўненні $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ і знайдзіце для кожнага з іх:
а) найменшы дадатны корань;
б) карані, якія належаць прамежку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;
в) найбольшы адмоўны корань;
г) карані, якія належаць прамежку $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

**150.** Дакажыце, што ўсе рашэнні ўраўнення $\operatorname{ctg} t=a$ знаходзяцца па формуле $t=\operatorname{arcctg} a+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

## 10. Рашэнне найпрасцейшых трыганаметрычных няроўнасцей

Рашэнне няроўнасцей, якія змяшчаюць трыганаметрычныя функцыі, зводзіцца, як правіла, да рашэння найпрасцейшых няроўнасцей віду $\sin t\leqslant a$, $\cos t>a$, $\operatorname{tg} t\geqslant a$ і да т. п.

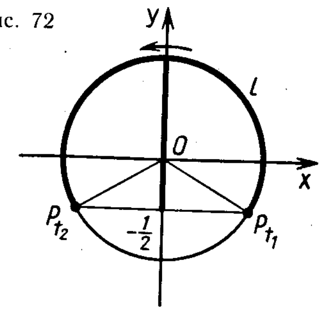
Разгледзім на прыкладах спосабы іх рашэння.

○ Прыклад 1. Рэшым няроўнасць $\sin t\geqslant-\frac{1}{2}$.

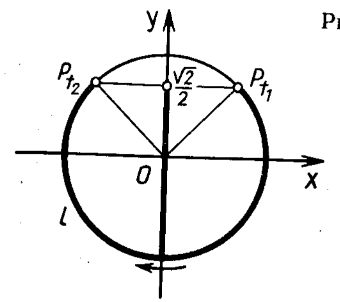
Усе пункты $P_t$ адзінкавай акружнасці пры значэннях $t$, якія задавальняюць дадзенай няроўнасці, маюць ардынату, большую або роўную $-\frac{1}{2}$. Мноства ўсіх такіх пунктаў — дуга $l$, вылучаная на рысунку 72. Знойдзем умову прыналежнасці пункта $P_t$ гэтай дузе.

Пункт $P_{t_1}$ ляжыць на правай паўакружнасці, ардыната $P_{t_1}$ роўна $-\frac{1}{2}$, і, значыць, у якасці $t_1$ зручна ўзяць значэнне $t_1=$ $=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$. Уявім сабе, што мы робім абход дугі $l$ ад пункта $P_{t_1}$ да $P_{t_2}$ супраць гадзіннікавай стрэлкі. Тады $t_2>t_1$, і, як лёгка зразумець, $t_2=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7\pi}{6}$. Такім чынам,

Рыс. 72




Рыс. 73



атрымліваем, што пункт $P_t$ належыць дузе $l$, калі $-\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

Такім чынам, рашэнні няроўнасці, якія належаць прамежку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ даўжынёй $2\pi$, такія: $-\frac{\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6}$. З прычыны перыядычнасці сінуса астатнія рашэнні атрымліваюцца дадаваннем да знойдзеных лікаў віду $2\pi n$, дзе $n \in \mathbf{Z}$. Прыходзім да адказу:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Прыклад 2. Рэшым няроўнасць $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Гэта няроўнасць азначае, што ўсе пункты $P_t$ адзінкавай акружнасці пры значэннях $t$, якія задавальняюць дадзенай няроўнасці, маюць ардынату, меншую за $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Мноства ўсіх такіх пунктаў — дуга $l$, паказаная на рысунку 73. Канцы яе $P_{t_1}$ і $P_{t_2}$ не ўваходзяць у разглядаемае мноства, паколькі іх ардынаты не меншыя, а роўныя $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Каб знайсці ўмову, пры якой пункт $P_t$ належыць указанаму мноству, знойдзем $t_1$ і $t_2$. Возьмем $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

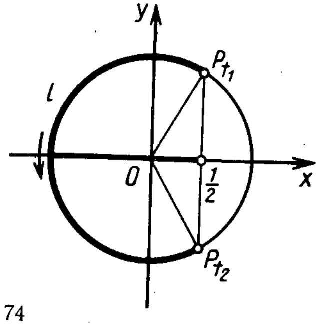
Разгледзім абход дугі $l$ ад пункта $P_{t_1}$ да $P_{t_2}$ у напрамку па гадзіннікавай стрэлцы; $t_2 < t_1$ і $t_2 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{5\pi}{4}$. Усе рашэнні няроўнасці з прамежку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ даўжынёй $2\pi$ такія: $-\frac{5\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$. Улічваючы перыядычнасць сінуса, атрымліваем усе рашэнні няроўнасці:

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

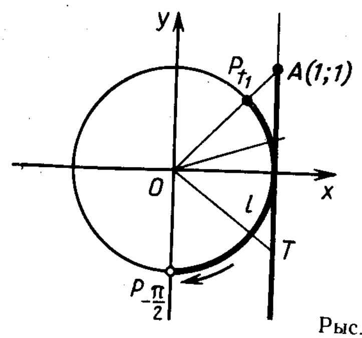
Прыклад 3. Рэшым няроўнасць $\cos t < \frac{1}{2}$.

Мноства пунктаў адзінкавай акружнасці, абсцысы якіх меншыя за $\frac{1}{2}$, ляжаць лявей ад прамой $x = \frac{1}{2}$. Значыць, мноства ўсіх такіх пунктаў ёсць дуга $l$, паказаная на рысунку 74 (канцы яе $P_{t_1}$ і $P_{t_2}$ не ўваходзяць у гэта мноства). Знаходзім $t_1$ і $t_2$. Пункт $P_{t_1}$ размешчаны на верхняй паўакружнасці, абсцыса $P_{t_1}$ роўна $\frac{1}{2}$, значыць, $t_1 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Пры пераходзе ад пункта $P_{t_1}$ да $P_{t_2}$ па дузе $l$ выконваем абход супраць гадзіннікавай стрэлкі, тады






Рыс. 74




Рыс. 75

$t_2 > t_1$ і $t_2 = 2\pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{3}$. Пункт належыць вылучанай дузе $l$ (выключаючы яе канцы) пры ўмове, што $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$. Рашэнні няроўнасці, якія належаць прамежку $[0; 2\pi]$ даўжынёй $2\pi$, такія: $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$. З прычыны перыядычнасці косінуса астатнія рашэнні атрымліваюцца дадаваннем да знойдзеных лікаў віду $2\pi n$, дзе $n \in \mathbf{Z}$. Прыходзім да канчатковага адказу:

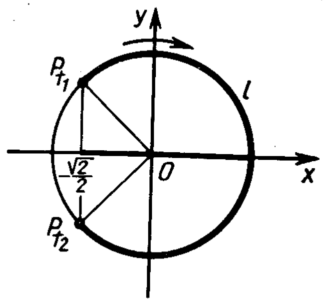
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Прыклад 4. Рэшым няроўнасць $\operatorname{tg} t \leqslant 1$.

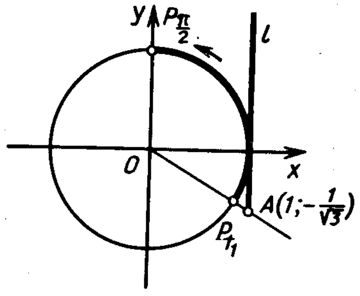
Перыяд тангенса роўны $\pi$. Таму знойдзем спачатку ўсе рашэнні дадзенай няроўнасці, якія належаць прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а затым выкарыстаем перыядычнасць тангенса. Для вылучэння ўсіх пунктаў $P_t$ правай паўакружнасці, значэнні $t$ якіх задавальняюць няроўнасці, звернемся да лініі тангенсаў. Калі $t$ з'яўляецца рашэннем няроўнасці, то ардыната пункта $T$, роўная $\operatorname{tg} t$, павінна быць меншай або роўнай 1. Мноства такіх пунктаў $T$ — прамень $AT$ (рыс. 75). Мноства пунктаў $P_t$, якія адпавядаюць пунктам гэтага праменя, — дуга $l$, вылучаная на рысунку (звярніце ўвагу: пункт $P_{t_1}$ належыць, а $P_{-\frac{\pi}{2}}$ не належыць разглядаемаму мноству).

Знаходзім умову, пры якой пункт $P_t$ належыць дузе $l$. $t_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} t_1 = 1$, значыць, $t_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Значыць, $t$ павінна задавальняць умове $-\frac{\pi}{2} < t \leqslant \frac{\pi}{4}$. Усе рашэнні дадзенай няроўнасці, якія належаць прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такія: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. Улічваючы перыядычнасць тангенса, атрымліваем адказ:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$




Рыс. 76




Рыс. 77

Прыклад 5. Рэшым няроўнасць $\cos 2x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Абазначыўшы $2x$ праз $t$, атрымаем $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$. На рысунку 76 вылучана адпаведная дуга $l$. Знаходзім $t_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = -\frac{3\pi}{4}$, адкуль

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Пераходзячы да пераменнай $x$, атрымліваем:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$-\frac{3\pi}{8} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{8} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Прыклад 6. Рэшым няроўнасць $3\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \sqrt{3}$. Пераўтварыўшы дадзеную няроўнасць, атрымаем:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad -\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Абазначым $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ праз $t$, тады $\mathrm{tg}\, t > -\frac{\sqrt{3}}{3}$. На рысунку 77 вылучана адпаведная дуга $l$. Паколькі $t_1 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, атрымліваем $-\frac{\pi}{6} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$. Пяройдзем да пераменнай $x$:

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}. \bullet$$



### *Практыкаванні*

На адзінкавай акружнасці адзначце пункты $P_t$, для якіх адпаведныя значэнні $t$ задавальняюць дадзенай няроўнасці. Знайдзіце мноства значэнняў $t$, якія задавальняюць няроўнасці і належаць указанаму прамежку (151—153).

**151.** а) $\sin t > \frac{1}{2}$, $t \in [0; \pi]$; б) $\sin t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in [-\pi; 0]$;

в) $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in [0; \pi]$; г) $\sin t < -\frac{1}{2}$, $t \in [-\pi; 0]$.

**152.** а) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\cos t < -\frac{1}{2}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) $\cos t > \frac{1}{2}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

**153.** а) $\mathrm{tg}\, t > -\sqrt{3}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\mathrm{tg}\, t < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\mathrm{tg}\, t > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\mathrm{tg}\, t < -1$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рашыце няроўнасці (154—157).

**154.** а) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**155.** а) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**156.** а) $\mathrm{tg}\, x \leqslant \sqrt{3}$; б) $\mathrm{tg}\, x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\mathrm{tg}\, x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\mathrm{tg}\, x < -1$.

**157.** а) $2\cos x - 1 \geqslant 0$; б) $2\sin x + \sqrt{2} \geqslant 0$;

в) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$; г) $3\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

---

Рашыце няроўнасці (158—163).

**158.** а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{x}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\mathrm{tg}\, 5x > 1$.

**159.** а) $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)<1$;
в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\geqslant 1$; г) $2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}$.

**160.** а) $\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{1}{2}$;
б) $\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $4\sin 2x\cos 2x\geqslant\sqrt{2}$;
г) $\cos\frac{\pi}{8}\cos x-\sin x\sin\frac{\pi}{8}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**161.** а) $\mathrm{ctg}\,x\geqslant\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)>1$;
в) $\mathrm{ctg}\,3x\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $3\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)>-\sqrt{3}$.

**162.** а) $3\sin\frac{x}{4}\geqslant 2$; б) $4\cos\frac{x}{3}<-3$;
в) $5\,\mathrm{tg}\,2x\leqslant 3$; г) $0{,}5\sin 4x<-0{,}2$.

**163.** Знайдзіце рашэнні няроўнасці, якія належаць указанаму прамежку:

а) $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right)$; б) $\cos\frac{x}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$;

в) $\mathrm{tg}\,x\geqslant-1$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$; г) $\sin 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in[0;\ \pi]$.

### 11. Прыклады рашэння трыганаметрычных ураўненняў і сістэм ураўненняў

У п. 9 было паказана, як рашаць найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні. Рашэнне больш складаных трыганаметрычных ураўненняў патрабуе ведання формул трыганаметрыі. Разгледзім некаторыя прыклады.

○ Прыклад 1. Рэшым ураўненне $2\sin^2 x+\sin x-1=0$.

Увядзём новую пераменную $y=\sin x$. Тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $2y^2+y-1=0$. Мы атрымалі квадратнае ўраўненне. Яго каранямі з'яўляюцца $y_1=\frac{1}{2}$ і $y_2=-1$. Значыць, $\sin x=\frac{1}{2}$ або $\sin x=-1$. У першым выпадку атрымаем рашэнні

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ \text{г. зн.}\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

У другім выпадку маем:

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$



Прыклад 2. Рэшым ураўненне $6\sin^2 x+5\cos x-2=0$.

Замяняючы $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, атрымаем адносна $\cos x$ квадратнае ўраўненне $6(1-\cos^2 x)+5\cos x-2=0$, адкуль $-6\cos^2 x+5\cos x+4=0$, г. зн. $6\cos^2 x-5\cos x-4=0$. Як і ў прыкладзе 1, увядзём новую пераменную $\cos x=y$. Тады $6y^2-5y-4=0$, адкуль $y=-\frac{1}{2}$ або $y=1\frac{1}{3}$. Ураўненне $\cos x=1\frac{1}{3}$ не мае рашэнняў, паколькі $1\frac{1}{3}>1$. Рашаючы ўраўненне $\cos x=-\frac{1}{2}$, знаходзім:

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Прыклад 3. Рэшым ураўненне $\mathrm{tg}\,x+2\,\mathrm{ctg}\,x=3$.

Абазначым $\mathrm{tg}\,x$ праз $y$. Паколькі $\mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$, атрымліваем ураўненне $y+\frac{2}{y}=3$, якое прыводзіцца да квадратнага $y^2-3y+2=0$ (пры ўмове $y\neq 0$). Яго карані $y=2$ і $y=1$.

1) $\mathrm{tg}\,x=2$, $x=\mathrm{arctg}\,2+\pi k$, г. зн. $x=x_0+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, дзе $x_0=\mathrm{arctg}\,2\approx 1{,}1072$.

2) $\mathrm{tg}\,x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Прыклад 4. Рэшым ураўненне $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

Значэнні $x$, пры якіх $\cos x=0$, не з'яўляюцца рашэннямі гэтага ўраўнення, таму што калі $\cos x=0$, то павінна выконвацца роўнасць $3\sin^2 x=0$, а косінус і сінус не могуць быць адначасова роўнымі нулю. Таму можна абедзве часткі ўраўнення падзяліць на $\cos^2 x$ (або на $\sin^2 x$) і пры гэтым атрымаць ураўненне, раўназначнае дадзенаму ўраўненню $3\,\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\,x+1=0$, адкуль $\mathrm{tg}\,x=1$ або $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{3}$. Значыць,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ \text{або}\ x=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Прыклад 5. Рэшым ураўненне $6\sin^2 x+4\sin x\cos x=1$.

Заменім 1 у правай частцы ўраўнення на $\sin^2 x+\cos^2 x$. Пасля выканання адпаведных пераўтварэнняў атрымліваем $5\sin^2 x+4\sin x\cos x-\cos^2 x=0$. Выкарыстаем прыём рашэння падобнага ўраўнення, які апісаны ў прыкладзе 4. У выніку маем: $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{5}$, $\mathrm{tg}\,x=-1$. Значыць,

$$x=\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\ \text{або}\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Прыклад 6. Ураўненне $\sin^2 x-\sin 2x=0$ пасля замены $\sin 2x$ на $2\sin x\cos x$ прыводзіцца да выгляду $\sin^2 x-2\sin x\cos x=0$.

Раскладзём левую частку на множнікі: $\sin x(\sin x - 2\cos x) = 0$, адкуль $\sin x = 0$, г. зн. $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, або $\sin x - 2\cos x = 0$, адкуль $\operatorname{tg} x = 2$ і $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, г. зн. $x = x_0 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, дзе $x_0 = \operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}1072$.

Як і ў прыкладзе 4, можна было падзяліць абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 x$ і атрымаць ураўненне $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0$. Калі ж дзяліць на $\sin^2 x$, то трэба ўлічыць, што тыя $x$, пры якіх $\sin x = 0$, — рашэнні дадзенага ўраўнення. Таму да каранёў атрыманага пасля дзялення на $\sin^2 x$ ураўнення $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} = 0$ трэба дадаць карані ўраўнення $\sin x = 0$. ●

Многія іншыя ўраўненні, напрыклад ураўненне $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ або ўраўненне $\sin^3 x + 2\sin^2 x \cos x - 5\sin x \cos^2 x + 2\cos^3 x = 0$ і да т. п., таксама рашаюцца дзяленнем левай і правай частак ураўнення на косінус (або сінус) у ступені, роўнай ступені ўраўнення. Папярэдне трэба праверыць, ці з'яўляюцца значэнні $x$, для якіх $\cos x = 0$ ($\sin x = 0$ пры дзяленні на $\sin^n x$), рашэннямі дадзенага ўраўнення. Так, ураўненні другой ступені дзеляць на $\cos^2 x$ (або $\sin^2 x$), а трэцяй — на $\cos^3 x$ (або $\sin^3 x$) і заменай $\operatorname{tg} x$ (або $\operatorname{ctg} x$) на $y$ атрымліваюць алгебраічнае ўраўненне.

○ Прыклад 7. Рэшым ураўненне $\cos 6x + \cos 2x = 0$.

Пераўтварыўшы суму косінусаў у здабытак, атрымаем $2\cos 4x \cos 2x = 0$. Гэта ўраўненне ператвараецца ў правільную роўнасць, калі $\cos 4x = 0$ або $\cos 2x = 0$, г. зн.

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4},\ k \in \mathbf{Z},\ \text{або}\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Прыклад 8. Рэшым сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y. \end{cases}$$

З першага ўраўнення знаходзім $y = x - \frac{5\pi}{3}$. Тады $2\sin y = 2\sin\left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{5\pi}{3} - \cos x \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Другое ўраўненне сістэмы прымае выгляд $\sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, адкуль $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, дзе $n \in \mathbf{Z}$. Далей знаходзім $y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Адказ. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n - \frac{7\pi}{6}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$. ●



### *Практыкаванні*

Рашыце ўраўненні (164—168).

**164.** а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; в) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; г) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$.

**165.** а) $6\cos^2 x + \text{cox}\, x - 1 = 0$; б) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; в) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; г) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$.

**166.** а) $2\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$; б) $\cos^2 x + 3\sin x = 3$; в) $4\cos x = 4 - \sin^2 x$; г) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

**167.** а) $3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$; б) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; в) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; г) $2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x + 5 = 0$.

**168.** а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$; б) $4\cos^2 x - 3 = 0$; в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0$; г) $4\sin^2 x - 1 = 0$.

---

Рашыце ўраўненні (169—174).

**169.** а) $3\sin^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x$;
б) $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$;
в) $9\sin x \cos x - 7\cos^2 x = 2\sin^2 x$;
г) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x$.

**170.** а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$; б) $\cos 2x = 2\cos x - 1$; в) $\sin 2x - \cos x = 0$; г) $\sin 2x + 4\cos^2 x = 1$.

**171.** а) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 2$; в) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; г) $\operatorname{tg} x = 3\operatorname{ctg} x$.

**172.** а) $\sin 2x + 2\cos 2x = 1$; б) $\sin^4\frac{x}{4} - \cos^4\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; в) $3\sin 2x + \cos 2x = 2\cos^2 x$; г) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$.

**173.** а) $\sin 4x + \sin^2 2x = 0$; б) $\frac{3}{5\operatorname{tg} x + 8} = 1$; в) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; г) $1 - \sin 2x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$.

**174.** а) $\cos 5x - \cos 3x = 0$; б) $\sin 7x - \sin x = \cos 4x$; в) $\sin 5x - \sin x = 0$; г) $\cos 3x + \cos x = 4\cos 2x$.

Рашыце сістэмы ўраўненняў (175—176).

**175.** а) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \pi, \\ \sin x + \sin y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1. \end{cases}$

**176.** а) $\begin{cases} \sin x - \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

## ЗВЕСТКІ З ГІСТОРЫІ

**1. Аб паходжанні адзінак вымярэння вуглоў.** Градуснае вымярэнне вуглоў узнікла ў Старажытным Вавілоне задоўга да новай эры. Жрацы лічылі, што свой дзённы шлях Сонца робіць за 180 «крокаў», і, значыць, адзін «крок» роўны $\frac{1}{180}$ разгорнутага вугла. У Вавілоне была прынята шасцідзесяцярычная сістэма лічэння, г. зн. фактычна лікі запісваліся ў выглядзе сумы ступеняў ліку 60, а не 10, як гэта прынята ў нашай дзесяцярычнай сістэме. Натуральна таму, што для ўвядзення больш дробных адзінак вымярэння вуглоў адзін «крок» паслядоўна дзяліўся на 60 частак.

Вавілонская сістэма вымярэння вуглоў аказалася дастаткова зручнай, і яе захавалі матэматыкі Грэцыі і Рыма. Тэрміны, якімі мы карыстаемся для назвы вуглавых велічынь, маюць лацінскія карані. Слова «градус» паходзіць ад лацінскага gradus (крок, ступень). У перакладзе з лацінскага minutus азначае «паменшаны». Нарэшце, secunda пераводзіцца як «другая». Маецца на ўвазе наступнае: дзяленне градуса на 60 частак, г. зн. мінуты,— гэта першае дзяленне; дзяленне мінуты на 60 секунд — другое дзяленне градуса. Малаўжывальная назва $\frac{1}{60}$ секунды — тэрцына, лацінскае tercina азначае «трэцяе» (дзяленне градуса).

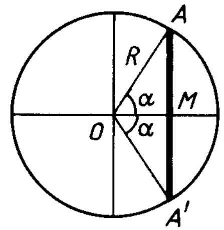
Прынятая цяпер сістэма абазначэння велічынь вуглоў атрымала шырокае распаўсюджанне на рубяжы XVI і XVII стст.; ёю ўжо карысталіся такія вядомыя астраномы, як М. Капернік і Т. Браге. Але яшчэ К. Пталемей (II ст. н. э.) колькасць градусаў (якія ён называў таксама проста часткамі) абазначаў кружком, лік мінут — штрыхом, а секунд — двума штрыхамі.

Другая адзінка вымярэння вуглоў — *радыян* — уведзена зусім нядаўна. Першае выданне (гэта былі экзаменацыйныя білеты), якое змяшчала тэрмін «радыян», з'явілася ў 1873 г. у Англіі. Спачатку ў абазначэннях указвалася, што маецца на ўвазе іменна радыянная мера (напрыклад, $\frac{\pi^R}{2}$ — вугал у $\frac{\pi}{2}$ радыян, але хутка індэкс $R$ (або $r$) сталі апускаць. Сам тэрмін «радыян» паходзіць ад лацінскага radius (спіца, прамень). Калі ўспомніць азначэнне вугла ў адзін радыян (цэнтральны вугал, даўжыня дугі якога роўна радыусу акружнасці), то выбар кораня «рад» для назвы такога вугла здаецца зусім натуральным.

**2. Аб гісторыі трыганаметрыі.** Слова «трыганаметрыя» ўпершыню сустракаецца (1505 г.) у загалоўку кнігі нямецкага тэолага і матэматыка Пітыскуса. Паходжанне гэтага слова грэчаскае: τρίγωνον — трохвугольнік, μετρεω — мера. Інакш кажучы, трыганаметрыя — навука аб вымярэнні трохвугольнікаў. Хоць назва ўзнікла параўнальна нядаўна, многія паняцці і факты, што цяпер адносяцца да трыганаметрыі, былі вядомыя ўжо дзве тысячы гадоў назад.



Доўгую гісторыю мае паняцце сінуса. Фактычна розныя адносіны адрэзкаў трохвугольніка і акружнасці (а па сутнасці, і трыганаметрычныя функцыі) сустракаюцца ў III ст. да н. э. у работах вялікіх матэматыкаў Старажытнай Грэцыі — Еўкліда, Архімеда, Апалонія Пергскага. У рымскі перыяд гэтыя адносіны ўжо дастаткова сістэматычна даследаваліся Менелаем (I ст. н. э.), хоць і не набылі спецыяльнай назвы. Сучасны сінус вугла $\alpha$, напрыклад, вывучаўся як паўхорда, на якую абапіраецца цэнтральны вугал велічынёй $\alpha$, або як хорда падвоенай дугі (рыс. 78).




$\sin\alpha = \frac{AM}{R} = \frac{AA'}{2R}$

Рыс. 78

У наступны перыяд матэматыка доўгі час найбольш актыўна развівалася індыйскімі і арабскімі вучонымі. У IV—V стст. з'явіўся, у прыватнасці, ужо спецыяльны тэрмін у працах па астраноміі вялікага індыйскага вучонага Арыябхаты (476 — каля 550), імем якога названы першы індыйскі спадарожнік Зямлі. Адрэзак $AM$ (гл. рыс. 78) ён назваў *ардхаджыва* (*ардха* — палавіна, *джыва* — цеціва лука, якую напамінае хорда). Пазней прывілася больш кароткая назва *джыва*. Арабскімі матэматыкамі ў IX ст. слова *джыва* (або *джыба*) было заменена на арабскае слова *джайб* (выпукласць). Пры перакладзе арабскіх матэматычных тэкстаў у XII ст. гэта слова было заменена лацінскім *сінус* (sinus — выгін, крывізна).

Слова *косінус* намнога маладзейшае. Косінус — гэта скарачэнне лацінскага выразу complementy sinus, г. зн. «дадатковы сінус» (або інакш «сінус дадатковай дугі»; успомніце $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$).

Маючы справу з трыганаметрычнымі функцыямі, мы істотна выходзім за рамкі задачы «вымярэння трохвугольнікаў». Таму вядомы матэматык Ф. Клейн (1849—1925) прапанаваў вучэнне аб «трыганаметрычных» функцыях называць інакш — *ганіяметрыяй* (лацінскае gonio азначае «вугал»). Аднак гэта назва не прывілася.

Тангенсы ўзніклі ў сувязі з рашэннем задачы аб вызначэнні даўжыні ценю. *Тангенс* (а таксама *катангенс, секанс* і *касеканс*) уведзены ў X ст. арабскім матэматыкам Абу-л-Вафой, які склаў і першыя табліцы для знаходжання тангенсаў і катангенсаў. Аднак гэтыя адкрыцці доўгі час заставаліся невядомымі еўрапейскім вучоным, і тангенсы былі нанава адкрыты ў XIV ст. спачатку англійскім вучоным Т. Бравердынам, а пазней нямецкім матэматыкам, астраномам Рэгіямантанам (1467 г.). Назва «тангенс», якая паходзіць ад лацінскага tanger (датыкацца), з'явілася ў 1583 г. Tangens пераводзіцца як «датычны» (успом-

ніце: лінія тангенсаў — гэта датычная да адзінкавай акружнасці).

Сучасныя абазначэнні arcsin і arctg з'яўляюцца ў 1772 г. у працах венскага матэматыка Шэрфера і вядомага французскага вучонага Ж. Л. Лагранжа, хаця некалькі раней іх ужо разглядаў Д. Бернулі, які карыстаўся іншай сімволікай. Але агульнапрынятымі гэтыя сімвалы сталі толькі ў канцы XVIII ст. Прыстаўка «арк» паходзіць ад лацінскага arcus (лук, дуга), што зусім узгадняецца з сэнсам паняцця: арксінус $x$, напрыклад,— гэта вугал (а можна сказаць, і дуга), сінус якога роўны $x$.

Доўгі час трыганаметрыя развівалася як частка геаметрыі, г. зн. факты, якія мы цяпер фармулюем у тэрмінах трыганаметрычных функцый, фармуляваліся і даказваліся пры дапамозе геаметрычных паняццяў і сцверджанняў. Бадай што, большыя стымулы да развіцця трыганаметрыі ўзнікалі ў сувязі з рашэннем задач астраноміі, што выклікала вялікую цікавасць (напрыклад, для рашэння задач вызначэння месцазнаходжання судна, прадказання зацьменняў і г. д.). Астраномаў цікавілі суадносіны паміж старанамі і вугламі сферычных трохвугольнікаў, складзеных з вялікіх кругоў, што ляжаць на сферы. І трэба заўважыць, што матэматыкі старажытнасці ўдачна спраўляліся з задачамі, істотна больш цяжкімі (пачытайце кнігі аб сферычнай геаметрыі), чым задачы на рашэнне плоскіх трохвугольнікаў, якімі вы займаліся ў IX класе.

Ва ўсякім выпадку, у геаметрычнай форме многія вядомыя вам формулы трыганаметрыі адкрываліся і пераадкрываліся старажытнагрэчаскімі, індыйскімі, арабскімі матэматыкамі. (Праўда, формулы рознасці трыганаметрычных функцый сталі вядомыя толькі ў XVII ст.— іх вывеў англійскі матэматык Нэпер для спрашчэння вылічэнняў з трыганаметрычнымі функцыямі. А першы рысунак сінусоіды з'явіўся ў 1634 г.)

Прынцыповае значэнне мела складанне К. Пталемеем першай табліцы сінусаў (доўгі час яна называлася табліцай хорд): з'явіўся практычны сродак рашэння рада прыкладных задач, і ў першую чаргу задач астраноміі.

Маючы справу з гатовымі табліцамі або карыстаючыся калькулятарам, мы часта не задумваемся над тым, што быў час, калі табліцы яшчэ не былі вынайдзены. Для таго каб скласці іх, патрабавалася не толькі выканаць вялікі аб'ём вылічэнняў, але і прыдумаць спосаб складання табліц. Табліцы Пталемея дакладныя да пяці дзесятковых знакаў уключна.

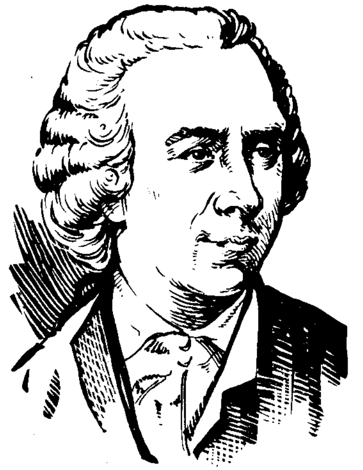
Сучасны выгляд трыганаметрыі прыдаў буйнейшы матэматык XVIII ст. Л. Эйлер (1707—1783), швейцарац па паходжанню, доўгія гады працаваў у Расіі і з'яўляўся членам Пецярбургскай акадэміі навук. Іменна Эйлер першым увёў вядомыя азначэнні трыганаметрычных функцый, стаў разглядаць функцыі адвольнага вугла, атрымаў формулы прывядзення. Усё гэта малая доля таго, што за доўгае жыццё Эйлер паспеў зрабіць у матэматыцы: ён пакінуў звыш 800 прац, даказаў многія стаўшыя класічнымі тэарэмы, якія належаць да самых розных галін матэматыкі. (Нягледзячы



**Эйлер Леанард**

**(1707—1783) —**

**найбуйнейшы матэматык XVIII стагоддзя. Нарадзіўся ў Швейцарыі. Доўгія гады жыў і працаваў у Расіі, член Пецярбургскай акадэміі навук. Вялікая навуковая спадчына Эйлера змяшчае выдатныя вынікі, якія адносяцца да матэматычнага аналізу, геаметрыі, тэорыі лікаў, варыяцыйнага лічэння, механікі і іншых дадаткаў матэматыкі.**



на тое што ў 1776 г. Эйлер страціў зрок, ён да апошніх дзён працягваў дыктаваць усё новыя і новыя працы.) Але калі вы спрабавалі аперыраваць з трыганаметрычнымі функцыямі ў геаметрычнай форме, г. зн. так, як гэта рабілі многія пакаленні матэматыкаў да Эйлера, то зможаце ацаніць заслугі Эйлера ў сістэматызацыі трыганаметрыі. Пасля Эйлера трыганаметрыя набыла форму лічэння: розныя факты пачалі даказвацца шляхам фармальнага прымянення формул трыганаметрыі, доказы сталі намнога больш кампактнымі і простымі.

**3. З гісторыі паняцця функцыі.** Паняцце функцыі, з якім вы знаёмы з VII класа, узнікла ў матэматыцы параўнальна нядаўна. Для таго каб прыйсці да разумення мэтазгоднасці яго ўвядзення і атрымаць першыя дастаткова дакладныя азначэнні, спатрэбіліся намаганні пакаленняў матэматыкаў некалькіх пакаленняў. Рэвалюцыйныя змяненні ў матэматыцы, якія адбыліся ў XVII ст., вызваны працамі многіх вучоных, якія прадстаўляюць розныя краіны і народы. Але ў першую чаргу трэба назваць імёны П. Ферма (1601—1665), Р. Дэкарта (1596—1650), І. Ньютана (1643—1727), Г. В. Лейбніца (1646—1716).

Неабходныя прадпасылкі да ўзнікнення паняцця функцыі былі створаны ў 30-х гадах XVII ст., калі ўзнікла *аналітычная геаметрыя*, якая характарызавалася, у адрозненне ад класічных метадаў геометраў Старажытнай Грэцыі, актыўным прыцягваннем алгебры да рашэння геаметрычных задач. (Рашаючы задачы па геаметрыі каардынатным метадам, вы, па сутнасці, карыстаецеся метадамі аналітычнай геаметрыі.) Практычна адначасова (і незалежна адзін ад аднаго) французскія матэматыкі П. Ферма і Р. Дэкарт заўважылі, што ўвядзенне сістэмы каардынат на плоскасці і заданні фігур іх ураўненнямі дазваляюць звесці



**Дэкарт Рэнэ**

**(1596—1650) —**

**вялікі французскі філосаф, матэматык. Адзін са стваральнікаў аналітычнай геаметрыі. Увёў паняцце пераменнай велічыні. Яго ідэі знайшлі шматлікіх паслядоўнікаў — «картэзіянцаў» (лацінізаванае імя Дэкарта — Картэзій). Галоўныя працы — «Геаметрыя», «Разважанні аб метадзе».**

многія задачы геаметрыі да даследавання ўраўненняў геаметрычных фігур. У гонар Дэкарта, які даў разгорнутае выкладанне новага метаду ў кнігах «Геаметрыя» і «Разважанне аб метадзе», прамавугольная сістэма каардынат пазней была названа *дэкартавай*. Істотна заўважыць, што адначасова фарміравалася і алгебра, стваралася «*літарнае лічэнне*», тое самае, пры дапамозе якога вы цяпер пераўтвараеце алгебраічныя выразы, рашаеце ўраўненні, тэкставыя задачы і г. д.

Вялікі англійскі вучоны, матэматык і фізік І. Ньютан, даследуючы залежнасці каардынат пункта, які рухаецца, ад часу, фактычна ўжо займаўся даследаваннем функцый. Хаця не ён увёў гэта паняцце, Ньютан выразна ўсведамляў яго значэнне. Так, у 1676 г. ён адзначаў: «Я не мог бы, безумоўна, атрымаць гэтых агульных рэзультатаў, перш чым не адхіліўся ад разгляду фігур і не звёў усё проста да даследавання ардынат» (г. зн. фактычна функцый ад часу).

Сам тэрмін «функцыя» ўпершыню сустракаецца ў рукапісе вялікага нямецкага матэматыка і філосафа Г. Лейбніца — спачатку ў рукапісе (1673 г.), а затым і ў друку (1692 г.). Лацінскае слова function пераводзіцца як «здзяйсненне», «выкананне» (дзеяслоў fungor пераводзіцца таксама словам «выражаць». Лейбніц увёў гэта паняцце для назвы розных параметраў, звязаных са становішчам пункта на плоскасці. У ходзе перапіскі Лейбніц і яго вучань — швейцарскі матэматык І. Бернулі (1667—1748) пастурова прыходзяць да разумення функцыі як аналітычнага выразу. І ў 1718 г. І. Бернулі дае такое азначэнне: «Функцыяй пераменнай велічыні называецца колькасць, складзеная любым спосабам з гэтай пераменнай і пастаянных».

Л. Эйлер у сваёй кнізе «Уводзіны ў аналіз» (1748 г.) фармуляваў азначэнне функцыі так: «Функцыя пераменнай колькасці ёсць аналітычны выраз, складзены якім-небудзь спосабам з гэтай пераменнай колькасці і лікаў або пастаянных колькасцей».



**Ньютан Ісак**

**(1643—1727) —**

**вялікі англійскі вучоны. Адначасова з Г. Лейбніцам распрацаваў асновы матэматычнага аналізу. Стваральнік класічнай механікі. Ньютану належаць выдатныя адкрыцці ў оптыцы, іншых раздзелах фізікі і матэматыкі. Галоўная яго праца — «Матэматычныя пачаткі натуральнай філасофіі» — аказала вялікі ўплыў на развіццё прыродазнаўства.**



Эйлер жа ўвёў і прынятыя цяпер абазначэнні для функцый.

Сучаснае азначэнне лікавай функцыі, у якім гэта паняцце ўжо вызвалялася ад спосабу задання, было дадзена незалежна адзін ад аднаго рускім матэматыкам М. І. Лабачэўскім (1834 г.) і нямецкім матэматыкам Л. Дзірыхле (1837 г.). Асноўная ідэя гэтых азначэнняў заключалася ў наступным: не істотна, якім чынам (і ў прыватнасці, неабавязкова шляхам задання аналітычнага выразу) кожнаму $x$ пастаўлена ў адпаведнасць пэўнае значэнне $y$, важна толькі, што гэта адпаведнасць устаноўлена.

Сучаснае паняцце функцыі з адвольнымі абласцямі вызначэння і значэнняў (неабавязкова лікавымі — гл. с. 26) сфарміравалася, па сутнасці, зусім нядаўна, у першай палавіне бягучага стагоддзя, пасля прац стваральніка тэорыі мностваў Г. Кантара (1845—1918).

Складаны і, як бачыце, вельмі доўгі шлях развіцця паняцця функцыі даволі тыпічны. Для таго каб усвядоміць неабходнасць увядзення новага абстрактнага паняцця, патрабуецца вылучыць яго ў працэсе рашэння многіх канкрэтных задач, даць азначэнне, якое па магчымасці дакладна адлюстроўвае яго сэнс. Гісторыя паняцця функцыі добра ілюструе вядомую формулу У. І. Леніна: «...абстракцыі адлюстроўваюць прыроду глыбей, правільней, *паўней*. Ад жывога сузірання да абстрактнага мыслення *і ад яго да практыкі* — такі дыялектычны шлях пазнання *ісціны*». (Ленін У. І. Поўн. зб. тв. Т. 29. С. 152—153.)

Да паняцця функцыі матэматыкі прыйшлі, зыходзячы з канкрэтных і цяжкіх задач матэматыкі і яе дадаткаў. Гэта адбывалася ў працэсе стварэння новага магутнага апарату даследаванняў — інтэгральнага і дыферэнцыяльнага злічэнняў, з элементамі якіх вы пазнаёміцеся ў наступным раздзеле. Адкрыццё інтэгральнага і дыферэнцыяльнага злічэнняў, цэнтральным паняццем якіх Эйлер абвясціў функцыю («Увесь аналіз бесканечнага верціцца вакол

пераменных колькасцей і іх функцый»), рэзка пашырыла магчымасці матэматыкі і наогул прыродазнаўства.

Яскравыя характарыстыкі глыбіні перавароту ў матэматыцы, які адбыўся ў XVII ст., далі Карл Маркс і Фрыдрых Энгельс, які, у прыватнасці, пісаў: «Паваротным пунктам у матэматыцы была дэкартава *пераменная велічыня.* Дзякуючы гэтаму ў матэматыку ўвайшлі *рух* і тым самым *дыялектыка* і дзякуючы гэтаму ж стала *неадкладна неабходным дыферэнцыяльнае і інтэгральнае злічэнне*». (Маркс К., Энгельс Ф. Зб. тв. Т. 20. С. 573.)

### *Пытанні і задачы на паўтарэнне*

**1.** 1) Што такое вугал у 1 радыян? Запішыце формулы, якія звязваюць радыянную і градусную меры вугла.
2) Выразіце ў радыяннай меры велічыню вугла:
а) $18°$; б) $-250°$; в) $-360°$; г) $225°$.
3) Выразіце ў градуснай меры велічыню вугла:
а) $\pi$; б) $-2{,}5$; в) $-\frac{\pi}{3}$; г) 3.

**2.** 1) Дайце азначэнні сінуса і косінуса ліку $\alpha$.
2) Адзначце на адзінкавай акружнасці пункт $P_\alpha$. Знайдзіце значэнні $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ (не карыстаючыся калькулятарам або табліцамі), калі $\alpha$ роўна:
а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$.
3) Знайдзіце значэнні $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, калі $\alpha$ роўна:
а) $23°24'$; б) $-1{,}7$; в) $-108°6'$; г) 0,8.

**3.** 1) Дайце азначэнні тангенса і катангенса ліку $\alpha$. Пры якіх значэннях $\alpha$ вызначаны $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$?
2) Знайдзіце (не карыстаючыся калькулятарам або табліцамі) $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\alpha$ роўна:
а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; в) $-\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$.
3) Знайдзіце значэнні $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\alpha$ роўна:
а) 1,7; б) $-0{,}4$; в) 2,3; г) $-0{,}5$.

**4.** 1) Запішыце формулы, якія звязваюць значэнні трыганаметрычных функцый аднаго аргумента.
2) Спрасціце выраз:
а) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;
б) $\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$;
в) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;
г) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$.



3) Дакажыце тоеснасць:
а) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$;
в) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

**5.** 1) Як залежаць знакі $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ад таго, у якой каардынатнай чвэрці ляжыць пункт $P_\alpha$? Назавіце гэтыя знакі.
2) Вызначце знак:
а) $\sin(-212°)$ і $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{9}$; б) $\cos 305°$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;
в) $\cos(-105°)$ і $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{9}$; г) $\sin(-324°)$ і $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}$.
3) Па дадзенаму значэнню адной з трыганаметрычных функцый і прамежку, якому належыць $\alpha$, знайдзіце значэнні астатніх трох асноўных трыганаметрычных функцый:
а) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=-3$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;
в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; г) $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

**6.** 1) Сфармулюйце мнеманічнае правіла для запамінання формул прывядзення. Запішыце некалькі формул прывядзення.
2) Прывядзіце да значэння трыганаметрычнай функцыі найменшага дадатнага аргумента:
а) $\sin\left(-\frac{13\pi}{8}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{13}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$; г) $\cos\frac{8\pi}{3}$.
3) Спрасціце выраз:
а) $\sin\frac{7\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;
б) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;
в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}+\sin\frac{37\pi}{12}-\cos\frac{7\pi}{12}$;
г) $\frac{\sin(\alpha-\pi)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)}$.

**7.** 1) Запішыце формулы сінуса, косінуса, тангенса сумы (рознасці).
2) Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, калі $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ і $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, калі $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

г) $\sin 75°$ і $\operatorname{tg} 75°$.

3) Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\operatorname{tg}2x$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\sqrt{3}$;

г) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$.

**8.** 1) Запішыце формулы двайнога аргумента.
2) Вылічыце:

а) $\sin 2\alpha$, калі $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg}2\alpha$, калі $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha<0$;

в) $\cos 2\alpha$, калі $\sin\alpha=\frac{15}{17}$;

г) $\operatorname{tg}2\alpha$, калі $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

3) Дакажыце тоеснасць:

а) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}(2\cos^2\alpha-1)=\sin 2\alpha$;

б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

в) $1-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\sin 2\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha$.

**9.** 1) Запішыце формулы сумы і рознасці сінусаў (косінусаў).
2) Вылічыце, не карыстаючыся калькулятарам або табліцамі:

а) $\cos 117°+\cos 63°$; б) $\dfrac{\sin 70°-\sin 10°}{\cos 40°}$;

в) $\cos\frac{19\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\sin 112°+\sin 248°$.

3) Дакажыце тоеснасць:

а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;



б) $(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2=4\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

г) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$.

**10.** 1) Запішыце формулы палавіннага аргумента.
2) Знайдзіце:

а) $\cos\frac{\alpha}{2}$, калі $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, калі $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\frac{\alpha}{2}$, калі $\sin\alpha=-\frac{3}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, калі $\cos\alpha=\frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

3) Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha$; б) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

**11.** 1) Што такое лікавая функцыя, яе вобласць вызначэння, вобласць значэнняў?
2) Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $y=\dfrac{3x+1}{x^2-7x+12}$; б) $y=\dfrac{1}{\sin x}$; в) $y=\sqrt{4-x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

3) Знайдзіце вобласць значэнняў функцыі:

а) $y=3\cos x-1$; б) $y=\frac{1}{x^2}+1$; в) $y=2-\sin x$; г) $y=3-x^4$.

**12.** 1) Што такое графік функцыі?
2) Пабудуйце графік функцыі:

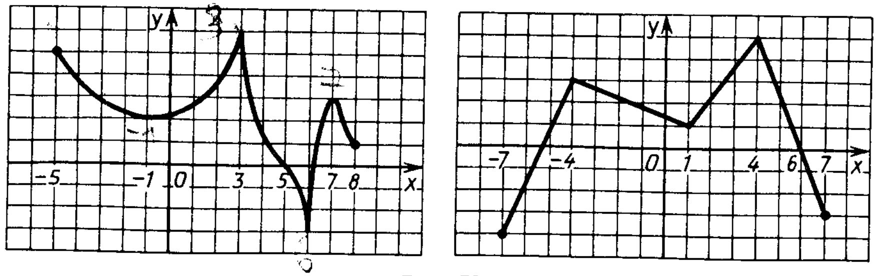
а) $y=\dfrac{2}{x-1}$; б) $y=2-\cos x$; в) $y=\sqrt{x+2}$; г) $y=\sin x-1$.

3) Знайдзіце пункты перасячэння графіка функцыі $f$ з восямі каардынат:

а) $f(x)=x^3-4x$; б) $f(x)=\frac{1}{x}+1$;

в) $f(x)=1-x^4$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

**13.** 1) Сфармулюйце азначэнне функцыі, узрастаючай (убываючай) на мностве $P$.
2) Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання функцыі, графік якой паказаны на рысунку 79.
3) Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання функцыі:




Рыс. 79

а) $y = 1 + 0{,}5\cos x$; б) $y = -\frac{3}{x-1}$;
в) $y = 2x^2 + 4x$; г) $y = 1{,}5\sin x - 1$.

**14.** 1) Дайце азначэнні пункта максімуму, пункта мінімуму. Што такое экстрэмум функцыі?
2) Укажыце пункты максімуму і пункты мінімуму функцый, графікі якіх паказаны на рысунку 79.
3) Знайдзіце пункты максімуму і пункты мінімуму функцыі:

а) $y = (x-3)^2 + 2$; б) $y = \cos^2 x$;
в) $y = 1 - (x+2)^2$; г) $y = \sin^2 x$.

**15.** 1) Якія задачы рашаюцца пры даследаванні функцыі?
2) Правядзіце даследаванне функцыі:

а) $y = \sin x - 2$; б) $y = -\frac{6}{x-3}$;
в) $y = x^2 - 4x + 3$; г) $y = 2\cos x + 1$.

3) Пабудуйце графікі гэтых функцый.

**16.** 1) Дайце азначэнне цотнай і няцотнай функцый. Якой уласцівасцю валодаюць іх графікі?
2) Высветліце, якая з дадзеных ніжэй функцый з'яўляецца цотнай, а якая — няцотнай:

а) $y = \frac{\sin x}{x}$; б) $y = x + x^5$;
в) $y = x\cos x$; г) $y = 3x^2 + x^6$.

3) Пабудуйце графік функцыі $f$, калі вядома, што:

а) $f$ — няцотная; $f(x) = \cos x - 1$ пры $x \in (-\infty;\ 0]$;
б) $f$ — цотная; $f(x) = (x-1)^3$ пры $x \in [0;\ \infty)$;
в) $f$ — цотная; $f(x) = \sin x$ пры $x \in (-\infty;\ 0]$;
г) $f$ — цотная; $f(x) = 4x - x^2$ пры $x \in [0;\ \infty)$.

**17.** 1) Што такое перыядычная функцыя, перыяд функцыі?
2) Які найменшы дадатны перыяд мае функцыя:

а) $y = \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x$; в) $y = \sin x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$?



3) Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = \cos(4x+1)$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \cos\frac{x}{3}$.

**18.** 1) Пералічыце асноўныя ўласцівасці функцыі сінус.
2) Карыстаючыся ўласцівасцямі функцыі сінус, размясціце ў парадку ўзрастання лікі:

а) $\sin 0{,}3$, $\sin 1{,}1$, $\sin(-1{,}2)$; б) $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2$;
в) $\sin 0{,}4$, $\sin(-0{,}9)$, $\sin 1{,}4$; г) $\sin 4{,}3$, $\sin 2{,}9$, $\sin 1{,}9$.

3) Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \sin\frac{x}{3}$;
в) $y = 1 + 1{,}5\sin x$; г) $y = \sin 2x$.

**19.** 1) Пералічыце асноўныя ўласцівасці функцыі косінус.
2) Карыстаючыся ўласцівасцямі функцыі косінус, размясціце ў парадку ўзрастання лікі:

а) $\cos 0{,}3$, $\cos(-2{,}9)$, $\cos 1{,}8$; б) $\cos 5{,}3$, $\cos 4{,}4$, $\cos 6{,}2$;
в) $\cos 0{,}5$, $\cos(-1{,}3)$, $\cos 3$; г) $\cos 6{,}1$, $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}9$.

3) Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -\cos x$;
в) $y = 2\cos x - 1$; г) $y = \cos\frac{x}{2}$.

**20.** 1) Пералічыце асноўныя ўласцівасці функцыі тангенс.
2) Карыстаючыся ўласцівасцямі функцыі тангенс, размясціце ў парадку ўзрастання лікі:

а) $\operatorname{tg}(-0{,}4)$, $\operatorname{tg} 1{,}2$, $\operatorname{tg} 0{,}8$; б) $\operatorname{tg} 2{,}8$, $\operatorname{tg} 3{,}9$, $\operatorname{tg} 1{,}6$;
в) $\operatorname{tg} 0{,}6$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg}(-0{,}7)$; г) $\operatorname{tg} 4{,}3$, $\operatorname{tg} 1{,}7$, $\operatorname{tg} 2{,}5$.

3) Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $y = -\operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; в) $y = 2\operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

**21.** 1) Сфармулюйце тэарэму аб корані.
2) Сфармулюйце азначэнне арксінуса ліку. Для якіх лікаў вызначаны арксінус?
3) Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin(-1) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
в) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 1$; г) $\arcsin 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**22.** 1) Сфармулюйце азначэнні арккосінуса і арктангенса ліку.
2) Для якіх лікаў вызначаны арккосінус і арктангенс ліку?

3) Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arccos(-1)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; б) $\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}(-1)$ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arccos 0+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**23.** 1) Запішыце формулы для рашэння найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў: $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$. Пры якіх значэннях $a$ гэтыя ўраўненні маюць рашэнні?

2) Рашыце ўраўненне:

а) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x+1=0$;

в) $2\sin x-\sqrt{2}=0$; г) $2\cos x-1=0$.

**24.** Рашыце ўраўненне:

1) а) $2\sin^2 x+3\sin x=2$; б) $\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+3=0$;

в) $2\cos^2 x-5\cos x=3$; г) $2\sin^2 x+\sin x=0$.

2) а) $6\sin^2 x-2\sin 2x=1$; б) $\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $4\sin x\cos x=\sqrt{3}$; г) $\cos^4 x-\sin^4 x=1$.

**25.** Рашыце няроўнасць (папярэдне ўкажыце на адзінкавай акружнасці мноства пунктаў $P_x$, такіх, што $x$ задавальняе дадзенай няроўнасці):

1) а) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2\cos x+1<0$;

в) $\operatorname{tg} x<\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2}\sin x+1>0$.

2) а) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}>-\frac{1}{4}$; б) $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}$;

в) $2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$; г) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



# ВЫТВОРНАЯ І ЯЕ ПРЫМЯНЕННІ

## § 4. ВЫТВОРНАЯ

### 12. Прырашчэнне функцыі

Часта нас цікавіць не значэнне якой-небудзь велічыні, а яе змяненне. Напрыклад, сіла пругкасці спружыны прапарцыянальная падаўжэнню спружыны; работа ёсць змяненне энергіі; сярэдняя скорасць — гэта адносіна перамяшчэння да прамежку часу, за які было зроблена гэта перамяшчэнне, і г. д.

Пры параўнанні значэння функцыі $f$ у некаторым фіксаваным пункце $x_0$ са значэннямі гэтай функцыі ў розных пунктах $x$, якія ляжаць у наваколлі $x_0$, зручна выражаць рознасць $f(x)-f(x_0)$ праз рознасць $x-x_0$, карыстаючыся паняццямі «прырашчэнне аргумента» і «прырашчэнне функцыі». Растлумачым іх сэнс.

Няхай $x$ — адвольны пункт, які ляжыць у некаторым наваколлі фіксаванага пункта $x_0$. Рознасць $x-x_0$ называецца *прырашчэннем незалежнай зменнай* (або *прырашчэннем аргумента*) у пункце $x_0$ і абазначаецца $\Delta x$. Такім чынам,

$$\Delta x=x-x_0,$$

адкуль вынікае, што $x=x_0+\Delta x$.

Гавораць таксама, што першапачатковае значэнне аргумента $x_0$ атрымала прырашчэнне $\Delta x$. У выніку гэтага значэнне функцыі $f$ зменіцца на велічыню

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Гэта рознасць называецца *прырашчэннем функцыі* $f$ у пункце $x_0$, якое адпавядае прырашчэнню $\Delta x$, і абазначаецца сімвалам $\Delta f$ (чытаецца: «дэльта эф»), г. зн. па азначэнню

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \qquad (1)$$

адкуль

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f.$$

Звярніце ўвагу: пры фіксаваным $x_0$ прырашчэнне $\Delta f$ ёсць функцыя ад $\Delta x$.

$\Delta f$ называюць таксама прырашчэннем залежнай пераменнай і абазначаюць праз $\Delta y$ для функцыі $y=f(x)$.

○ Прыклад 1. Знойдзем прырашчэнні $\Delta x$ і $\Delta f$ у пункце $x_0$, калі $f(x)=x^2$, $x_0=2$ і: а) $x=1{,}9$; б) $x=2{,}1$.

а) $\Delta x=x-x_0=1{,}9-2=-0{,}1$;
$\Delta f=f(1{,}9)-f(2)=1{,}9^2-2^2=-0{,}39$;

б) $\Delta x = x - x_0 = 2{,}1 - 2 = 0{,}1;$
$\Delta f = f(2{,}1) - f(2) = 2{,}1^2 - 2^2 = 0{,}41.$

Прыклад 2. Знойдзем прырашчэнне $\Delta f$ функцыі $f(x) = \frac{1}{x}$ у пункце $x_0$, калі прырашчэнне аргумента роўна $\Delta x$.

Па формуле (1) знаходзім:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Прыклад 3. Дадзен куб з кантам $a$. Выразіце хібнасць $\Delta V$, дапушчаную пры вылічэнні аб'ёму гэтага куба, калі хібнасць пры вымярэнні даўжыні канта роўна $\Delta x$. Па азначэнню прырашчэння $x = a + \Delta x$, тады

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \bullet$$

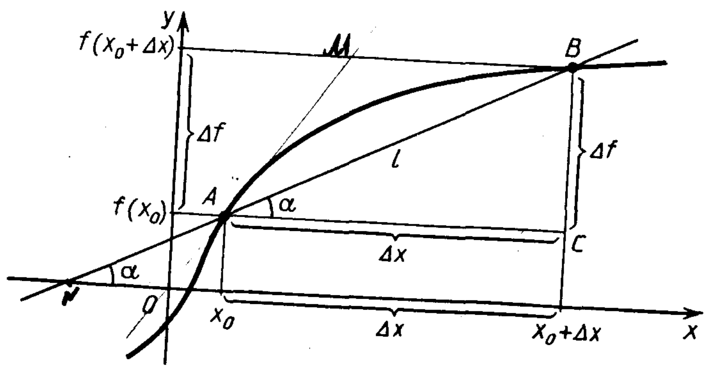
Разгледзьце графік функцыі $y = f(x)$. Геаметрычны сэнс прырашчэння $\Delta x$ і $\Delta f$ (прырашчэнне $\Delta f$ абазначаюць таксама $\Delta y$) можна зразумець, разгледзеўшы рысунак 80.

Прамую $l$, якая праходзіць праз любыя два пункты графіка функцыі $f$, называюць *сякучай* да графіка $f$. Вуглавы каэфіцыент $k$ сякучай, што праходзіць праз пункты $(x_0;\ y_0)$ і $(x;\ y)$, роўны $\frac{y - y_0}{x - x_0}$. Яго зручна выразіць праз прырашчэнні $\Delta x$ і $\Delta y$ (рыс. 80):

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(Напомнім, што вуглавы каэфіцыент прамой $y = kx + b$ роўны тангенсу вугла $\alpha$, які гэта прамая ўтварае з воссю абсцыс.)

Пры дапамозе ўведзеных абазначэнняў прырашчэнняў зручна таксама выражаць сярэднюю скорасць руху за прамежак часу




Рыс. 80



$[t_0;\ t_0 + \Delta t]$. Калі пункт рухаецца па прамой і вядома яго каардыната $x(t)$, то

$$V_{\text{сярэдн}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Гэта формула правільная і для $\Delta t < 0$ (для прамежку $[t_0 + \Delta t;\ t_0]$). На самай справе, у гэтым выпадку перамяшчэнне пункта роўна $x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)$; працягласць прамежку часу роўна $-\Delta t$, і, значыць,

$$V_{\text{сярэдн}}(\Delta t) = \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Аналагічна выраз $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ называюць *сярэдняй скорасцю змянення функцыі* на прамежку з канцамі $x_0$ і $x_0 + \Delta x$.

### *Практыкаванні*

**177.** а) Стораны прамавугольніка роўны 15 м і 20 м. Знайдзіце прырашчэнні яго перыметра і плошчы, калі: 1) меншую яго старану павялічылі на 0,11 м; 2) большую яго старану павялічылі на 0,2 м.

б) Радыус круга роўны 2 см. Знайдзіце хібнасць, дапушчаную пры вылічэнні яго плошчы, калі хібнасць пры вымярэнні даўжыні радыуса роўна: 1) 0,2 см; 2) $\Delta R$; 3) 0,1 см; 4) $h$.

**178.** Знайдзіце прырашчэнне функцыі $f$ у пункце $x_0$, калі:

а) $f(x) = -\frac{2}{x},\ x_0 = -2;\ \Delta x = 0{,}1;$

б) $f(x) = 2x^2 - 3,\ x_0 = 3,\ \Delta x = -0{,}2;$

в) $f(x) = 3x + 1,\ x_0 = 5,\ \Delta x = 0{,}01;$

г) $f(x) = \frac{x^2}{2},\ x_0 = 2,\ \Delta x = 0{,}1.$

**179.** Знайдзіце прырашчэнні $\Delta x$ і $\Delta f$ у пункце $x_0$, калі:

а) $f(x) = \cos^2 x,\ x_0 = \frac{2\pi}{3},\ x = \frac{3\pi}{4};$

б) $f(x) = 4x - x^2,\ x_0 = 2{,}5,\ x = 2{,}6;$

в) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{3};$

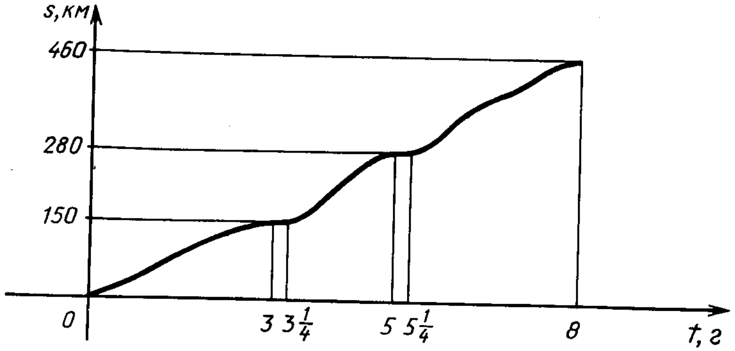
г) $f(x) = \sqrt{2x - 1},\ x_0 = 1{,}22,\ x = 1{,}345.$

**180.** Выразіце прырашчэнне функцыі $f$ у пункце $x_0$ праз $x_0$ і $\Delta x$, калі:

а) $f(x) = 1 - 3x^2$; б) $f(x) = ax + b$; в) $f(x) = 2x^2$; г) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

**181.** На рысунку 81 паказан графік руху аўтобуса. Знайдзіце сярэднюю скорасць руху за прамежак часу:

а) [0; 3]; б) [3; 5]; в) [3,25; 5,25]; г) [0; 8].




Рыс. 81

**182.** Пункт рухаецца па каардынатнай прамой, прычым у любы момант часу $t$ яго каардыната роўна $3+12t-t^2$. На колькі і ў якім напрамку перамесціцца пункт за прамежак $I$ часу: а) $[2; 2{,}5]$; б) $[7; 8]$; в) $[4; 5]$; г) $[6; 8]$? Чаму роўна яго сярэдняя скорасць?

**183.** Пабудуйце прамыя, якія праходзяць праз пункт $(1; 3)$ і маюць вуглавыя каэфіцыенты: а) $-1$ і $2$; б) $\frac{1}{2}$ і $-3$; в) $3$ і $-2$; г) $-\frac{1}{2}$ і $-2$. Высветліце ў кожным з выпадкаў, які вугал (тупы ці востры) утвараюць гэтыя прамыя з воссю абсцыс.

**184.** Знайдзіце вуглавы каэфіцыент сякучай да графіка функцыі $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, які праходзіць праз пункты з дадзенымі абсцысамі $x_1$ і $x_2$. Які вугал (тупы ці востры) утварае сякучая з воссю $Ox$, калі:

а) $x_1=0,\ x_2=1$; б) $x_1=-1,\ x_2=-2$;
в) $x_1=1,\ x_2=2$; г) $x_1=-1,\ x_2=0$?

**185.** Кант куба $x$ атрымаў прырашчэнне $\Delta x$. Знайдзіце прырашчэнне плошчы поўнай паверхні куба.

**186.** Выразіце $\Delta f$ і $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ праз $x_0$ і $\Delta x$ і пераўтварыце атрыманыя выразы:

а) $f(x)=-x^3+3x$; б) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$;

в) $f(x)=x^3-2x$; г) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

**187.** Знайдзіце сярэднюю скорасць пункта, які рухаецца па прамой, за прамежак часу $[t_0; t_0+\Delta t]$, калі вядомы закон руху:



а) $x(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$; б) $x(t)=-at+b$;

в) $x(t)=\frac{gt^2}{2}$; г) $x(t)=at-b$.

## 13. Паняцце аб вытворнай

**1. Паняцце аб датычнай да графіка функцыі.** Графікі практычна ўсіх вядомых вам функцый паказваліся ў выглядзе гладкіх крывых. Разгледзім, як геаметрычна пабудаваны такія крывыя, на канкрэтным прыкладзе — графіку функцыі $y=x^2$ (рыс. 82) пры значэннях аргумента, блізкіх да 1.

Для гэтага павялічым адзінку маштаба (у параўнанні з маштабам рысунка 82) у 10 разоў; у гэтым маштабе пабудуем графік $y=x^2$ на адрэзку $[0{,}5; 1{,}5]$ (рыс. 83). Затым, павялічваючы маштаб яшчэ ў 10 разоў, пабудуем графік гэтай функцыі на адрэзку $[0{,}95; 1{,}05]$ (рыс. 84). На гэтым рысунку добра відаць, што пры значэннях, блізкіх да 1, графік $y=x^2$ практычна не адрозніваецца ад маленькага адрэзка прамой $y=2x-1$, г. зн. пункты графіка дадзенай функцыі як бы «выстройваюцца» ўздоўж гэтай прамой.

Аналагічнай уласцівасцю валодае любая гладкая крывая: адвольны яе маленькі ўчастак практычна не адрозніваецца ад адрэзка некаторай прамой $l$. (Цікава заўважыць, што графапабудавальнікі, якія прымяняюцца ў ЭВМ, «рысуюць» графікі гладкіх функцый па пунктах, праводзячы да кожнага пункта маленькі адрэзак.) Адзначым, што для кожнага пункта гладкай крывой прамая, якая адпавядае гэтаму пункту (г. зн. прамая, адрэзкам якой мы ўяўляем сабе маленькі ўчастак крывой), зусім вызначана. Каб зразумець гэта, звернемся да наступнай нагляднай ілюстрацыі.

Дапусцім, мы хочам зрабіць трафарэт, каб хутка рысаваць сінусоіду, парабалу або гіпербалу і г. д. Для гэтага папярэдне на міліметровай паперы будуецца магчыма дакладней графік гэтай крывой. Як вы можаце пераканацца, пры дапамозе нажніц удаецца акуратна выразаць трафарэт, мяжа якога — патрэбная нам крывая. Становішча нажніц у кожным пункце (а яно і задае шукаемую прамую ў гэтым пункце) зусім вызначана: любое адхіленне нажніц пры разразанні ад гэтага становішча прыводзіць або да з'яўлення выступу, або да прарэзу трафарэта.

Прамую, што праходзіць праз пункт $(x_0; f(x_0))$, з адрэзкам якой практычна зліваецца графік функцыі $f$ пры значэннях $x$, блізкіх да $x_0$, называюць *датычнай да графіка функцыі* $f$ у пункце $(x_0; f(x_0))$. Узнікае натуральная задача: вызначыць дакладнае становішча датычнай да графіка дадзенай функцыі $f$ у зададзеным пункце.

Каардынаты аднаго пункта прамой $l$ вядомыя — гэта пункт $(x_0; f(x_0))$. Застаецца знайсці вуглавы каэфіцыент $k$ датычнай.

У якасці прыкладу разгледзім функцыю $y=x^2$. Яе графік у малым наваколлі пункта $x_0$ блізкі да адрэзка датычнай $l$. Таму

натуральна чакаць, што вуглавыя каэфіцыенты сякучых, якія праходзяць праз пункты $(x_0;\ x_0^2)$ і $(x_0+\Delta x;\ (x_0+\Delta x)^2)$, будуць блізкія да вуглавога каэфіцыента $k$, калі $\Delta x$ будзе неабмежавана прыбліжацца да нуля (г. зн. пункт $x$ прыбліжаецца да $x_0$).

Вуглавы каэфіцыент $k(\Delta x)$ сякучай, якая праходзіць праз пункты $(x_0;\ y(x_0))$ і $(x_0+\Delta x;\ y(x_0+\Delta x))$, роўны $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (п. 12), дзе $\Delta y$ — прырашчэнне функцыі ў пункце $x_0$, якое адпавядае прырашчэнню $\Delta x$ аргумента. Для функцыі $y=x^2$

$$k(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x. \qquad (1)$$

Каб знайсці вуглавы каэфіцыент датычнай, застаецца высветліць, да якога значэння блізкае $k(\Delta x)$, калі $\Delta x$ прыбліжаецца да нуля. Відавочна, што $k(\Delta x)$ блізкае да $2x_0$. Значыць, пры вельмі малых значэннях $\Delta x$ вуглавы каэфіцыент сякучай блізкі да $2x_0$. Пры $x_0=1$ атрымліваем $k=2$. Улічваючы, што шукаемая датычная праходзіць праз пункт (1; 1), прыходзім да вываду, што ўраўненне датычнай такое: $y=2x-1$. Да гэтага ж вываду мы прыйшлі ў пачатку пункта з чыста наглядных меркаванняў.

**2. Імгненная скорасць руху.** Звернемся цяпер да задачы, вядомай вам з фізікі. Разгледзім рух пункта па прамой. Няхай каардыната $x$ пункта ў момант часу $t$ роўна $x(t)$. Як і ў курсе фізікі, дапускаем, што рух адбываецца неперарыўна і плаўна. Інакш кажучы, гаворка ідзе аб рухах, назіраемых у рэальным жыцці. Для пэўнасці будзем лічыць, што гаворка ідзе аб руху аўтамабіля па прамалінейнаму ўчастку шасэ.

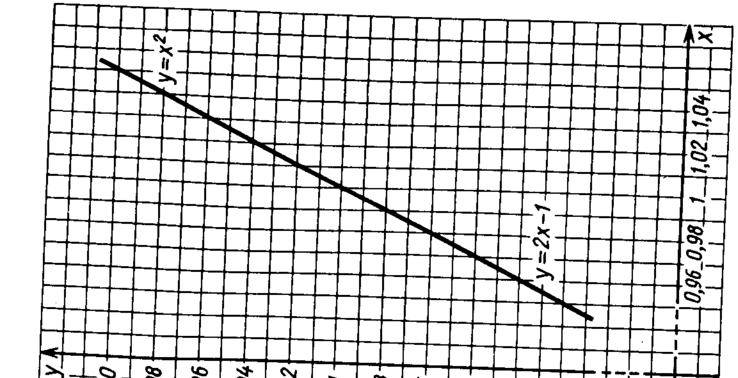
Паставім задачу: па вядомай залежнасці $x(t)$ вызначыць скорасць, з якой рухаецца аўтамабіль у момант часу $t$ (як вы ведаеце, гэта скорасць называецца *імгненнай скорасцю*). Калі залежнасць $x(t)$ лінейная, адказ просты: у любы момант часу скорасць ёсць адносіна пройдзенага шляху да часу. Калі рух не раўнамерны, задача больш складаная.

Той факт, што ў любы момант часу аўтамабіль рухаецца з якойсьці пэўнай (для гэтага моманту) скорасцю, відавочны. Гэту скорасць лёгка знайсці, зрабіўшы ў момант часу $t_0$ фотаздымак спідометра. (Спідометр паказвае значэнне імгненнай скорасці ў момант $t$.) Для таго каб знайсці скорасць $v_{\text{імгн}}(t_0)$, ведаючы $x(t)$, на ўроках фізікі вы рабілі наступнае.

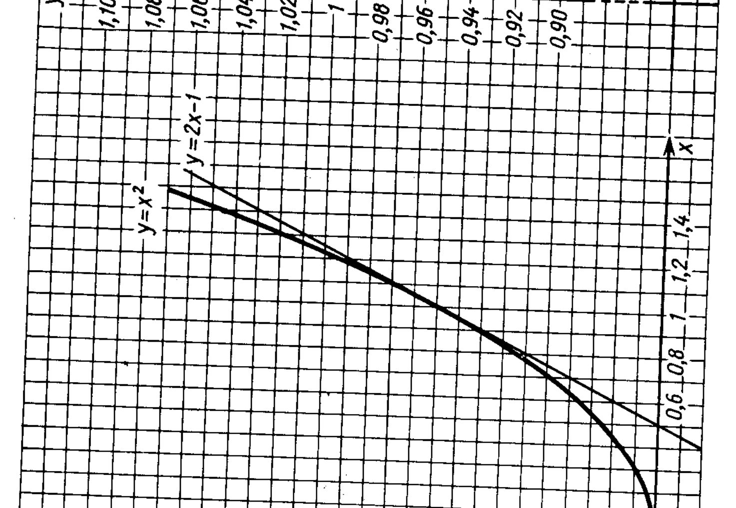
Сярэдняя скорасць за прамежак часу працягласцю $|\Delta t|$ ад $t_0$ да $t_0+\Delta t$ вядомая (п. 12):

$$v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (2)$$

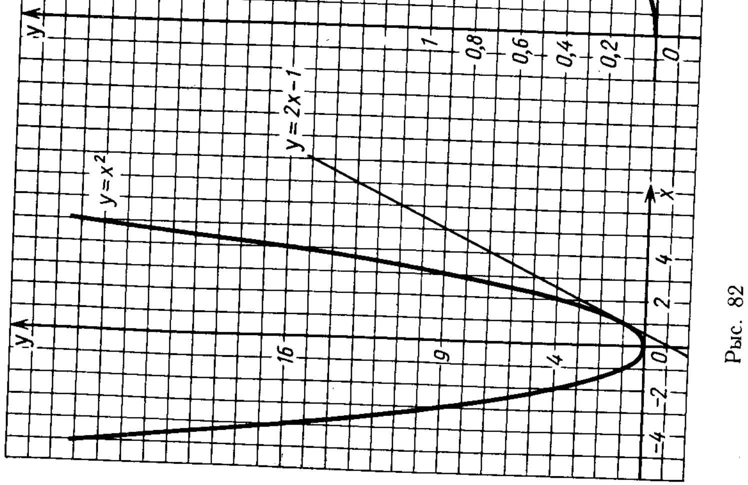
Як мы дапусцілі, цела рухаецца плаўна. Таму натуральна дапускаць: калі $\Delta t$ вельмі малое, то за гэты прамежак часу скорасць практычна не змяняецца. Але тады сярэдняя скорасць (на гэтым прамежку часу) практычна не адрозніваецца ад значэння



Рыс. 84



Рыс. 83



Рыс. 82

$v_{\text{імгн}}(t_0)$, якое мы шукаем. Гэта падказвае наступны спосаб вызначэння імгненнай скорасці: знайсці $v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)$ і паглядзець, да якога значэння яно блізкае, калі лічыць, што $\Delta t$ практычна не адрозніваецца ад нуля.

Разгледзім канкрэтны прыклад. Знойдзем імгненную скорасць цела, кінутага ўверх са скорасцю $v_0$. Вышыня яго ў момант $t$ знаходзіцца па вядомай формуле $h(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$.

1) Знойдзем спачатку $\Delta h$:

$$\Delta h(t)=v_0(t_0+\Delta t)-\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-v_0t_0+\frac{gt_0^2}{2}=$$

$$=v_0\Delta t-gt_0\Delta t-\frac{g(\Delta t)^2}{2}.$$

2) $$v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)=\frac{(v_0-gt_0)\Delta t-g\frac{(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t}=v_0-gt_0-\frac{g\Delta t}{2}. \qquad (3)$$

3) Будзем цяпер памяншаць $\Delta t$, прыбліжаючы яго да нуля. (Для кароткасці гавораць, што $\Delta t$ імкнецца да нуля. Гэта запісваецца так: $\Delta t\to 0$.)

Як лёгка зразумець, у гэтым выпадку значэнне $-\frac{g\Delta t}{2}$ таксама імкнецца да нуля, г. зн.

$$-\frac{g\Delta t}{2}\to 0 \text{ пры } \Delta t\to 0.$$

А паколькі велічыні $v_0$ і $-gt_0$, а значыць, і $v_0-gt_0$ пастаянныя, з формулы (3) атрымліваем:

$$v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)\to v_0-gt_0 \text{ пры } \Delta t\to 0.$$

Такім чынам, імгненная скорасць пункта ў момант часу $t_0$ знаходзіцца па формуле

$$v_{\text{імгн}}(\Delta t)=v_0-gt_0.$$

**3. Вытворная.** Разгледжаныя дзве задачы аб вылічэнні вуглавога каэфіцыента датычнай да парабалы ў пункце з абсцысай $x_0=1$ і знаходжанні імгненнай скорасці цела, кінутага ўверх са скорасцю $v_0$, мелі розныя фармулёўкі. Аднак у абодвух выпадках мы дзейнічалі, па сутнасці, прытрымліваючыся адной схемы. У прымяненні да адвольнай функцыі $f$ і любога пункта $x_0$ яе вобласці вызначэння гэта схема можа быць апісана наступным чынам.

1) Пры дапамозе формулы, якая задае функцыю $f$, знаходзім яе прырашчэнне ў пункце $x_0$:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

2) Знаходзім выраз для *рознаснай адносіны* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$



якую затым пераўтвараем — спрашчаем, скарачаем на $\Delta x$ і да т. п.

3) Высвятляем, да якога ліку імкнецца $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі лічыць, што $\Delta x$ імкнецца да нуля.

Знойдзены такім чынам лік часам называецца (па аналогіі з фізікай) *скорасцю змянення функцыі* $f$ у пункце $x_0$ або (што больш прынята) *вытворнай функцыі* $f$ *у пункце* $x_0$.

Азначэнне. ***Вытворнай функцыі*** $\boldsymbol{f}$ ***у пункце*** $\boldsymbol{x_0}$ ***называецца лік, да якога імкнецца рознасная адносіна***

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

***пры*** $\boldsymbol{\Delta x}$***, якое імкнецца да нуля.***

Вытворная функцыі $f$ у пункце $x_0$ абазначаецца $f'(x_0)$ (чытаецца: «эф штрых ад $x_0$»).

Прыклад 1. Знойдзем вытворную функцыі $f(x)=x^3$ у пункце $x_0$.

Будзем рабіць па апісанай вышэй схеме.

1) $\Delta f=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2 \quad (\Delta x\neq 0)$.

3) Цяпер заўважым, што складаемае $3x_0^2$ пастаяннае, а пры $\Delta x\to 0$ відавочна, што $3x_0\Delta x\to 0$ і $(\Delta x)^2\to 0$, а значыць, і $3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\to 0$. Атрымліваем:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}\to 3x_0^2 \text{ пры } \Delta x\to 0.$$

Значыць,

$$f'(x_0)=3x_0^2.$$

Прыклад 2. Знойдзем вытворную функцыі $f(x)=kx+b$ ($k$ і $b$ пастаянныя) у пункце $x_0$.

1) $\Delta f=(k(x_0+\Delta x)+b)-(kx_0+b)=k\Delta x$.

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=k$.

3) Паколькі $k$ — пастаянная, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — пастаянны лік пры любым $\Delta x$, і, значыць, $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to k$ пры $\Delta x\to 0$.

Такім чынам, $(kx+b)'=k$.

Функцыю, якая мае вытворную ў пункце $x_0$, называюць *дыферэнцыруемай* у гэтым пункце. Няхай $D_1$ — мноства пунктаў, у якіх функцыя $f$ дыферэнцыруемая. Супастаўляючы кожнаму $x\in D_1$ лік $f'(x)$, атрымаем новую функцыю з вобласцю вызначэння $D_1$. Гэта функцыя называецца *вытворнай* функцыі $y=f(x)$ і абазначаецца $f'$ або $y'$.

Знаходжанне вытворнай дадзенай функцыі $f$ называецца *дыферэнцыраваннем*.

У гэтым пункце мы атрымалі наступныя формулы дыферэнцыравання:

$$(x^2)' = 2x,\ (x^3)' = 3x^2,\ (kx+b)' = k.$$

Дапускаючы ў формуле $(kx+b)'=k$, што $k=0$, $b=c$, дзе $C$ — адвольная пастаянная, атрымліваем, што $C'=0$, г. зн. *вытворная пастаяннай роўна нулю.*

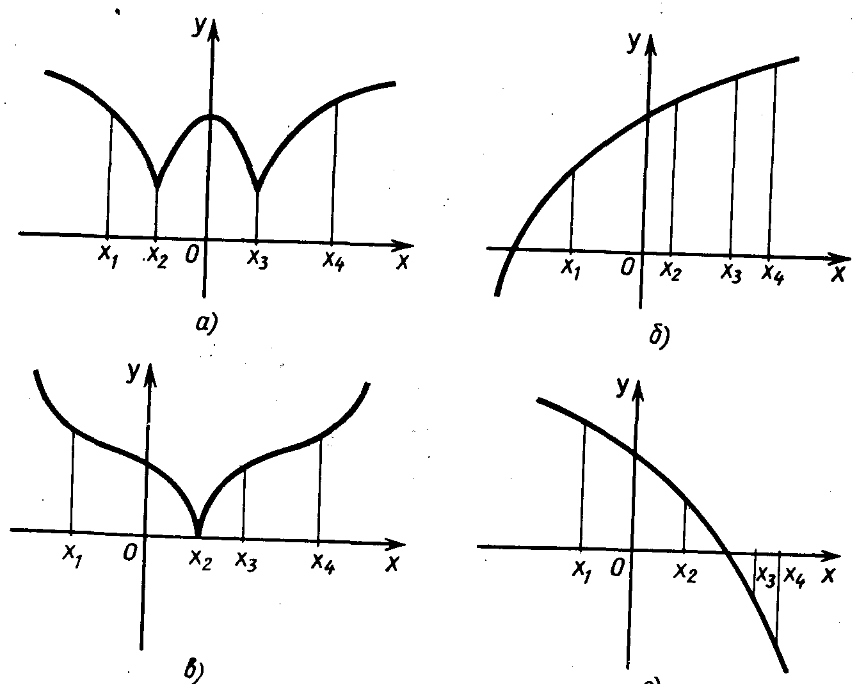
### *Практыкаванні*

**188.** Пабудуйце графік функцыі $f$ і правядзіце да яго датычную, якая праходзіць праз пункт з абсцысай $x_0$. Карыстаючыся рысункам, вызначце знак вуглавога каэфіцыента гэтай датычнай:

а) $f(x)=x^2-2x-3$, $x_0=0$, $x_0=3$, $x_0=2$, $x_0=-1$;

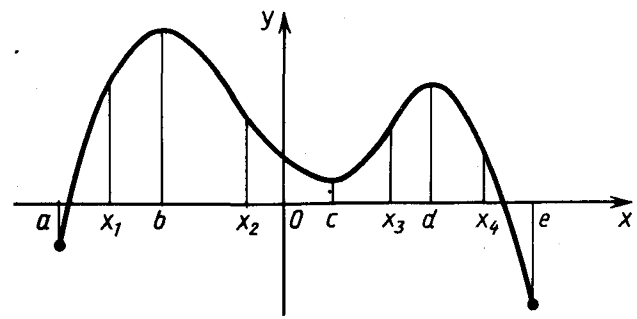
б) $f(x)=\frac{x^2}{2}+1$, $x_0=-2$, $x_0=1$, $x_0=-1$, $x_0=2$.

**189.** Вызначце знак вуглавога каэфіцыента датычнай, праведзенай да графіка функцыі (рыс. 85) праз пункты з абсцысай $x_1, x_2, x_3, x_4$ (калі датычная існуе). Які вугал (востры ці тупы)




Рыс. 85






Рыс. 86

утварае гэта датычная з воссю абсцыс? У наваколлі якіх пунктаў графік функцыі з'яўляецца «гладкай» крывой?

**190.** Запішыце прамежкі ўзрастання і ўбывання функцыі (рыс. 86). Вызначце знак вуглавога каэфіцыента датычнай у кожным з пунктаў, адзначаных на графіку.

**191.** Вылічыце $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ у пункце $x_0$, калі:

а) $f(x)=2x^2$, $x_0=1$, $\Delta x$ роўна 0,5; 0,1; 0,01;

б) $f(x)=x^2$, $x_0=1$, $\Delta x$ роўна 0,5; 0,1; 0,01.

**192.** Да якога ліку імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ пры $\Delta x \to 0$, калі:

а) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=8x_0+4\Delta x$, $x_0$ роўна 2; $-1$;

б) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2$, $x_0$ роўна 1; $-21$;

в) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0-2\Delta x$, $x_0$ роўна 4; 1;

г) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=-2x_0+\Delta x$, $x_0$ роўна 1; 2?

**193.** Выкарыстоўваючы формулы дыферэнцыравання, атрыманыя ў п. 13, знайдзіце вытворную функцыі $f$ у пункце $x_0$, калі:

а) $f(x)=x^3$, $x_0$ роўна 2; $-1,5$;

б) $f(x)=4-2x$, $x_0$ роўна 0,5; $-3$;

в) $f(x)=3x-2$, $x_0$ роўна 5; $-2$;

г) $f(x)=x^2$, $x_0$ роўна 2,5; $-1$.

---

**194.** Карыстаючыся азначэннем вытворнай, знайдзіце значэнні вытворнай функцыі $f$, калі:

а) $f x)=x^2-3x$ у пунктах $-1$; 2;

б) $f(x)=2x^3$ у пунктах 0; 1;

в) $f(x)=\frac{1}{x}$ у пунктах $-2$; 1;

г) $f(x)=4-x^2$ у пунктах 3; 0.

**195.** Знайдзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x)=x^2$, якая праходзіць праз яго пункт з абсцысай $x_0$, калі:

а) $x_0=-1$; б) $x_0=3$; в) $x_0=0$; г) $x_0=2$.

**196.** Карыстаючыся азначэннем, знайдзіце імгненную скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна па закону $x(t)$, у момант $t_0$:

а) $x(t)=-t^2+8t,\ t_0=6$; б) $x(t)=3t^3+2,\ t_0=2$;

в) $x(t)=\frac{t^2}{4},\ t_0=4$; г) $x(t)=5t-3,\ t_0=10$.

## 14. Паняцце аб непарарыўнасці функцыі і гранічным пераходзе

Вернемся да задачы вызначэння імгненнай скорасці ў пункце $t_0$ (гл. формулу (3) п. 13). Функцыя $v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)=v_0-gt_0-g\times\frac{\Delta t}{2}$ не вызначана пры $\Delta t=0$. Але для ліку $L=v_0-gt_0$ пры памяншэнні $|\Delta t|$ рознасць $v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)-L$ прыбліжаецца да нуля. Іменна таму мы пісалі $v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)\to v_0-gt_0$ пры $\Delta t\to 0$.

Наогул гавораць, што *функцыя $f$ імкнецца да ліку $L$ пры $x$, які імкнецца да $x_0$*, калі рознасць $f(x)-L$ неабмежавана малая, г. зн. $|f(x)-L|$ становіцца меншай за любы фіксаваны $h>0$ пры памяншэнні $|\Delta x|$, дзе $\Delta x=x-x_0$. (Значэнне $x=x_0$ не разглядаецца, як і ў задачы на вызначэнне імгненнай скорасці.)

Замест $x\to x_0$ можна, зразумела, пісаць $\Delta x\to 0$.

Знаходжанне ліку $L$ па функцыі $f$ называюць *гранічным пераходам*. Вы будзеце мець справу з гранічнымі пераходамі ў двух наступных асноўных выпадках.

Першы выпадак — гэта гранічны пераход у рознаснай адносіне $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, г. зн. знаходжанне вытворнай. З гэтым выпадкам вы пазнаёміліся ў папярэднім пункце.

Другі выпадак звязаны з паняццем непарарыўнасці функцыі. Калі $f(x)\to f(x_0)$ пры $x\to x_0$, то функцыю называюць *непарарыўнай у пункце $x_0$*. Пры гэтым $f(x)-L=f(x)-f(x_0)=\Delta f$; атрымаем, што $|\Delta f|$ малое пры малых $|\Delta x|$, г. зн. малым змяненням аргумента ў пункце $x_0$ адпавядаюць малыя змяненні значэнняў функцыі. Усе вядомыя вам элементарныя функцыі непарарыўныя ў кожным пункце сваёй вобласці вызначэння. Графікі такіх функцый паказваюцца непарарыўнымі крывымі на кожным прамежку, які цалкам уваходзіць у вобласць вызначэння. На гэтым і заснаваны спосаб пабудавання графікаў «па пунктах», якім вы ўвесь час карыстаецеся. Але пры гэтым, строга гаворачы, трэба папярэдне высветліць, ці сапраўды разглядаемая функцыя непарарыўная.



У найпрасцейшых выпадках такое даследаванне праводзяць на аснове азначэння непарарыўнасці.

Прыклад 1. Дакажам, што лінейная функцыя $f(x)=kx+b$ непарарыўная ў кожным пункце лікавай прамой.

Нам трэба паказаць, што $|\Delta f|$ становіцца меншым за любы фіксаваны $h>0$ пры малых $|\Delta x|$. Але $|\Delta f|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|=|(k(x_0+\Delta x)+b)-(kx_0+b)|=|k|\ |\Delta x|$ і $|\Delta f|$ будзе меншым за $h>0$, калі ўзяць $|\Delta x|<\frac{h}{|k|}$ пры $k\neq 0$ (пры $k=0$ можна браць любое $\Delta x$).

Прыклад 2. Дакажам, што функцыя $f(x)=\sqrt{x}$ непарарыўная ў пункце $x_0$ пры $x_0>0$.

Перш за ўсё адзначым, што $\Delta x$ мы будзем выбіраць такім, што $|\Delta x|\leqslant x_0$; тады $\sqrt{x}=\sqrt{x_0+\Delta x}$ вызначаны. Ацэнім рознасць $\sqrt{x}-\sqrt{x_0}$:

$$|\Delta f|=|\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}|=$$

$$=\left|\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right|=$$

$$=\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right|<\frac{|\Delta x|}{\sqrt{x_0}}.$$

Лёгка бачыць, што $|\Delta f|$ стане меншым за $h>0$, калі ўзяць $|\Delta x|$ меншае за $\sqrt{x_0}\,h$ (і, як мы адзначалі вышэй, меншае за $x_0$). ●

▽ У задачы вызначэння імгненнай скорасці лік $v_{\text{імгн}}(t_0)$ быў вызначаны так, што функцыя $v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)$, «дапоўненая» ў нулі лікам $v_{\text{імгн}}$, становіцца непарарыўнай у гэтым пункце. Тая ж сітуацыя і ў задачы вызначэння вуглавога каэфіцыента датычнай: функцыя $g(\Delta x)=2x_0+\Delta x$ стане непарарыўнай у гэтым пункце, калі лічыць, што $g(0)=2x_0$. ▲

Як відаць з прыкладаў папярэдняга пункта, новая аперацыя — гранічны пераход — з'яўляецца новым сродкам знаходжання невядомых велічынь. Ёю мы будзем шырока карыстацца ў гэтым раздзеле. Вылучым правілы гранічнага пераходу, якія даказваюцца ў курсах матэматычнага аналізу.

Правіла 1. *Калі функцыя $f$ непарарыўная ў пункце $x_0$, то $\Delta f\to 0$ пры $\Delta x\to 0$.*

Правіла 2. *Калі функцыя $f$ мае вытворную ў пункце $x_0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$.*

Правілы 1 і 2 адразу вынікаюць з азначэнняў непарарыўнасці функцыі $f$ у пункце $x_0$ і вытворнай у пункце $x_0$.

Правіла 3. *Няхай $f(x)\to A$, $g(x)\to B$ пры $x\to x_0$. Тады пры $x\to x_0$ (г. зн. пры $\Delta x\to 0$):*

а) $f(x)+g(x)\to A+B$; б) $f(x)\cdot g(x)\to A\cdot B$;
в) $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{A}{B}$ (*пры* $B\neq 0$).

Для неперарыўных функцый $f$ і $g$

$$A=f(x_0),\ B=g(x_0)$$

і гэтыя правілы азначаюць, што сума, здабытак і дзель неперарыўных у пункце $x_0$ функцый неперарыўныя ў пункце $x_0$ (дзель у выпадку, калі $g(x_0)\neq 0$).

Правілы гранічнага пераходу шырока выкарыстоўваюцца пры доказе неперарыўнасці функцый і вывадзе формул дыферэнцыравання.

Прыклад 3. Дакажам, што функцыя $h(x)=10x+\sqrt{x}$ неперарыўная ў любым пункце $x_0$ прамежку $(0;\ \infty)$. Неперарыўнасць функцый $f(x)=10x$ і $g(x)=\sqrt{x}$ была доказана ў прыкладах 1 і 2. Значыць, функцыя $h$ неперарыўная як сума дзвюх неперарыўных функцый (правіла 3, а).

Прыклад 4. Дакажам, што $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, дзе $f(x)=\sqrt{x}$.

1) Для адвольнага пункта $x_0$

$$\Delta f=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}$$

(гл. прыклад 2).

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}$.

3) $\sqrt{x_0+\Delta x}\to\sqrt{x_0}$ пры $\Delta x\to 0$ па правілу 1, паколькі функцыя $\sqrt{x}$ неперарыўная ў пункце $x_0$ (гл. прыклад 2), таму $\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}\to 2\sqrt{x_0}$ пры $\Delta x\to 0$ (па правілу 3, а) і $\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\Delta x}}\to\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ пры $\Delta x\to 0$ (па правілу 3, в). Такім чынам,

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

для любога дадатнага $x$.

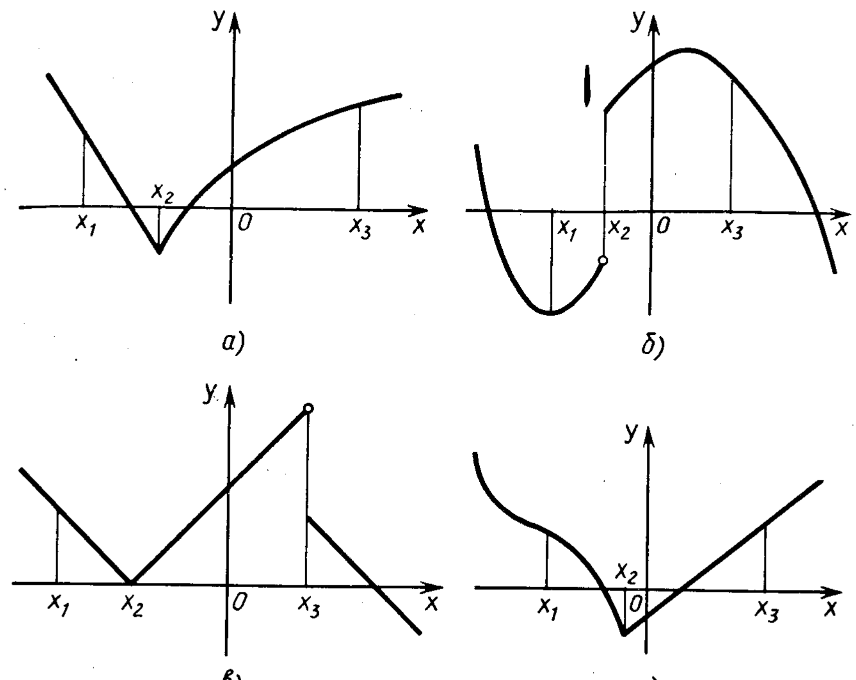
### *Практыкаванні*

**197.** Ці з'яўляецца неперарыўнай у кожным з пунктаў $x_1$, $x_2$, $x_3$ функцыя, графік якой паказаны на рысунку 87?

**198.** Пабудуйце графік функцыі $f$. Ці змяшчаецца ў яе вобласці вызначэння пункт, у якім функцыя не з'яўляецца неперарыўнай?

а) $f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{пры } x\leqslant -1,\\ 1-x^2 & \text{пры } x>-1;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}4 & \text{пры } x<0,\\ 4-x^2 & \text{пры } x\geqslant 0;\end{cases}$






Рыс. 87

в) $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{пры } x\leqslant 1,\\ 2x-1 & \text{пры } x>1;\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{пры } x<1,\\ \frac{1}{x} & \text{пры } x\geqslant 1.\end{cases}$

**199.** Ці з'яўляецца функцыя $f$ неперарыўнай у кожным пункце дадзенага прамежку:

а) $f(x)=x^3-4x$, $(-\infty;\ \infty)$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$, $[2;\ \infty)$;

в) $f(x)=x^2+2x-1$, $[-10;\ 20]$; г) $f(x)=5x-\sqrt{x}$, $(0;\ \infty)$?

**200.** Да якога ліку імкнецца функцыя $f$, калі:

а) $f(x)=x^2-3x+4$, $x\to 0$, $x\to 2$;

б) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $x\to 1$, $x\to 4$;

в) $f(x)=4-\frac{x}{2}$, $x\to -2$, $x\to 0$;

г) $f(x)=4x-\frac{x^2}{4}$, $x\to -1$, $x\to 4$?

**201.** Вядома, што $f(x)\to 1$, $g(x)\to -2$ пры $x\to 3$. Да якога ліку пры $x\to 3$ імкнецца функцыя:

а) $3f(x)g(x)$; б) $\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$; в) $4f(x)-g(x)$; г) $(3-g(x))f(x)$?

**202.** Вядома, што $f(x)\to 3$, $g(x)\to -0{,}5$ пры $x\to -1$. Знайдзіце лік, да якога пры $x\to -1$ імкнецца функцыя:

а) $\frac{f(x)}{(g(x))^2}$; б) $(f(x)-g(x))^2$;

в) $(f(x))^2+2g(x)$; г) $\frac{(g(x))^2}{f(x)-2}$.

**203.** Да якога ліку імкнецца функцыя:

а) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x-3}$ пры $x\to 4$;

б) $f(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-2x+7}$ пры $x\to -1$;

в) $f(x)=\frac{5-2x}{2+x}$ пры $x\to 2$;

г) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ пры $x\to -1$?

**204.** З якой дакладнасцю знойдзен перыметр квадрата, калі яго старана вымерана з дакладнасцю да 0,01 дм?

**205.** З якой дакладнасцю дастаткова вымераць старану правільнага трохвугольніка, каб знайсці яго перыметр з дакладнасцю да 0,03 дм?

**206.** З якой дакладнасцю трэба вымераць радыус, каб вылічыць даўжыню акружнасці з дакладнасцю да 0,06 дм?

**207.** Вядома, што $f(x)\to A$, $g(x)\to B$ пры $x\to a$. Карыстаючыся правіламі гранічнага пераходу, дакажыце, што:

а) $Cf(x)\to C\cdot A$, дзе $C$ — пастаянная;
б) $f(x)-g(x)\to A-B$;
в) $(f(x))^2-(g(x))^2\to A^2-B^2$;
г) $(f(x))^n\to A^n$, дзе $n\in \mathbf{Z}$.

## 15. Правілы вылічэння вытворных

**1. Асноўныя правілы дыферэнцыравання.** Выведзем некалькі правіл вылічэння вытворных. У гэтым пункце значэнні функцый $u$ і $v$ і іх вытворных у пункце $x_0$ абазначаюцца для кароткасці так: $u(x_0)=u$, $v(x_0)=v$, $u'(x_0)=u'$, $v'(x_0)=v'$.

Правіла 1. *Калі функцыі* $\boldsymbol{u}$ *і* $\boldsymbol{v}$ *дыферэнцыруемыя ў пункце* $x_0$, *то іх сума дыферэнцыруемая ў гэтым пункце і*

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}'.$$

Коратка гавораць: *вытворная сумы роўна суме вытворных.*

1) Для доказу вылічым спачатку прырашчэнне сумы функцый у разглядаемым пункце:

$$\Delta(u+v)=u(x_0+\Delta x)+v(x_0+\Delta x)-(u(x_0)+v(x_0))=$$
$$=(u(x_0+\Delta x)-u(x_0))+(v(x_0+\Delta x)-v(x_0))=\Delta u+\Delta v.$$



2) $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) Функцыі $u$ і $v$ дыферэнцыруемыя ў пункце $x_0$, г. зн. пры $\Delta x\to 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u',\ \frac{\Delta v}{\Delta x}\to v'.$$

Тады $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}\to u'+v'$ пры $\Delta x\to 0$ (гл. правіла 3, а) гранічнага пераходу п. 14), г. зн. $(u+v)'=u'+v'$.

Лема. *Калі функцыя* $f$ *дыферэнцыруемая ў пункце* $x_0$, *то яна неперарыўная ў гэтым пункце:* $\Delta f\to 0$ *пры* $\Delta x\to 0$, *г. зн.*

$$f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)\ \text{пры}\ \Delta x\to 0.$$

Сапраўды, $\Delta f=\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x\to f'(x_0)\cdot 0$ пры $\Delta x\to 0$, паколькі $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$, а $\Delta x\to 0$. Такім чынам, $\Delta f\to 0$ пры $\Delta x\to 0$, г. зн. для дыферэнцыруемых функцый $f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$.

Правіла 2. *Калі функцыі* $\boldsymbol{u}$ *і* $\boldsymbol{v}$ *дыферэнцыруемыя ў пункце* $x_0$, *то іх здабытак дыферэнцыруемы ў гэтым пункце і*

$$(\boldsymbol{uv})'=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'.$$

1) Знойдзем спачатку прырашчэнне здабытку:

$$\Delta(uv)=u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=(u(x_0)+\Delta u)(v(x_0)+\Delta v)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=u(x_0)v(x_0)+\Delta u v(x_0)+u(x_0)\Delta v+\Delta u\Delta v-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=\Delta u v(x_0)+u(x_0)\Delta v+\Delta u\Delta v.$$

2) $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x_0)+u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) З прычыны дыферэнцыруемасці функцый $u$ і $v$ у пункце $x_0$ пры $\Delta x\to 0$ маем $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u'$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}\to v'$, $\Delta u\to 0$. Таму $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}\to u'v(x_0)+u(x_0)v'+0\cdot v'=u'v(x_0)+u(x_0)v'$, г. зн. $(uv)'=u'v+uv'$, што і трэба было даказаць.

Вынік. *Калі функцыя* $\boldsymbol{u}$ *дыферэнцыруемая ў* $x_0$, *а* $\boldsymbol{C}$ *— пастаянная, то функцыя* $\boldsymbol{Cu}$ *дыферэнцыруемая ў гэтым пункце і*

$$(\boldsymbol{Cu})'=\boldsymbol{Cu}'.$$

Коратка гавораць: *пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай.*

Для доказу выкарыстаем правіла 2 і вядомы з п. 13 факт: $C'=0$:

$$(Cu)'=C'u+Cu'=0\cdot u+Cu'=Cu'.$$

Правіла 3. *Калі функцыі* $u$ *і* $v$ *дыферэнцыруемыя ў пункце* $x_0$ *і функцыя* $v$ *не роўна нулю ў гэтым пункце, то дзель* $\frac{u}{v}$ *таксама дыферэнцыруемая ў* $x_0$ *і*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Выведзем спачатку формулу

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

1) Знойдзем прырашчэнне функцыі $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{1}{v(x_0)}=\frac{v(x_0)-v(x_0+\Delta x)}{v(x_0)\,v(x_0+\Delta x)}=\frac{-\Delta v}{v(x_0)\,(v(x_0)+\Delta v)}.$$

2) Адсюль

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0)\,(v(x_0)+\Delta v)}.$$

3) Пры $\Delta x\to 0$ маем $\frac{\Delta v}{\Delta x}\to v'$ (з прычыны дыферэнцыруемасці $v$ у пункце $x_0$), $\Delta v\to 0$ (па даказанай леме). Таму

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x}\to\frac{-v'}{v\cdot v}=-\frac{v'}{v^2},\ \text{г. зн.}\ \left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

Цяпер, карыстаючыся правілам знаходжання вытворнай здабытку функцый, знаходзім вытворную дзелі:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\left(u\cdot\frac{1}{v}\right)'=u'\cdot\frac{1}{v}+u\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{u'}{v}+u\cdot\frac{-v'}{v^2}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Прыклад 1. Знайдзіце вытворныя функцый: а) $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$.

а) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$, таму $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)'=(x^2)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=2x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x+\frac{1}{x^2}$;

б) $$\left(\frac{x^2}{x^3+1}\right)'=\frac{(x^2)'(x^3+1)-x^2(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{2x(x^3+1)-x^2((x^3)'+1')}{(x^3+1)^2}=$$
$$=\frac{2x(x^3+1)-x^2(3x^2+0)}{(x^3+1)^2}=\frac{2x^4+2x-3x^4}{(x^3+1)^2}=\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}.$$

**2. Вытворная ступеннай функцыі.** Формула для вылічэння вытворнай ступеннай функцыі $x^n$, дзе $n$ — адвольны натуральны лік, большы за 1, такая:

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \qquad (1)$$



Формула вытворнай функцыі $x^2$ ужо вядомая: $(x^2)'=2x$.

Карыстаючыся формулай дыферэнцыравання здабытку, атрымліваем:

$$(x^3)'=(x^2\cdot x)'=(x^2)'x+x^2(x)'=2x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2;$$
$$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'x+x^3(x)'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3.$$

Заўважым цяпер, што

$$(x^2)'=2x^{2-1},\ (x^3)'=3x^{3-1},\ (x^4)'=4x^{4-1},$$

г. зн. для $n$, роўнага 2, 3 і 4, формула (1) даказана. Працягваючы аналагічныя разважанні, пераконваемся ў справядлівасці формулы (1) для $n$, роўнага 5, 6 і г. д.

Дакажам, што формула (1) правільная для любога натуральнага $n>4$.

▽ Дапусцім, што формула (1) правільная пры $n=k$, г. зн., што

$$(x^k)'=kx^{k-1}.$$

Пакажам, што тады формула (1) правільная і пры $n=k+1$. Сапраўды,

$$(x^{k+1})'=(x^k\cdot x)'=(x^k)'\cdot x+x^k\cdot(x)'=kx^{k-1}\cdot x+x^k=kx^k+x^k=$$
$$=(k+1)x^k.$$

Таму з таго, што формула (1) правільная пры $n=4$, вынікае, што яна правільная і пры $n=5$, але тады яна правільная і пры $n=6$, а значыць, і пры $n=7$ і г. д. да любога $n\in\mathbf{N}$ (строгі доказ заснаваны на метадзе матэматычнай індукцыі). ▲

Калі $n=1$ або $n=0$, то пры $x\neq 0$ гэта формула таксама справядлівая. Сапраўды, па формуле (1) пры $x\neq 0$

$$(x^1)'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1,$$
$$(x^0)'=0\cdot x^{0-1}=0,$$

што супадае са значэннямі вытворных функцый $x$ і 1, ужо вядомымі з папярэдняга пункта.

Няхай, урэшце, $n$ — цэлы адмоўны лік, тады $n=-m$, дзе $m$ — лік натуральны. Прымяняючы правіла дыферэнцыравання дзелі і карыстаючыся ўжо даказанай для натуральных $m$ формулай (1), атрымліваем пры $x\neq 0$:

$$(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=\frac{-(x^m)'}{(x^m)^2}=\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-m\cdot\frac{1}{x^{m+1}}=$$
$$=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}.$$

У выніку можна зрабіць вывад:

*Для любога цэлага* $n$ *і любога* $x$ ($x\neq 0$ пры $n\leqslant 1$)

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Прыклад 2. Знойдзем вытворныя функцыі: а) $f(x)=x^{-5}$; б) $f(x)=3x^7-\frac{5}{x^3}$.

а) $(x^{-5})'=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}$;

б) $\left(3x^7-\frac{5}{x^3}\right)'=3(x^7)'-5(x^{-3})'=3\cdot 7x^6-5(-3)x^{-4}=$

$=21x^6+\frac{15}{x^4}$.

З дыферэнцыруемасці ступеннай функцыі і асноўных правіл вылічэння вытворных вынікае, што *цэлыя рацыянальныя функцыі (мнагачлены) і дробава-рацыянальныя функцыі дыферэнцыруемыя ў кожным пункце сваёй вобласці вызначэння.*

### *Практыкаванні*

Знайдзіце вытворныя функцыі (208—211).

**208.** а) $f(x)=x^2+x^3$; б) $f(x)=\frac{1}{x}+5x-2$; в) $f(x)=x^2+3x-1$; г) $f(x)=x^3+\sqrt{x}$.

**209.** а) $f(x)=x^3(4+2x-x^2)$; б) $f(x)=\sqrt{x}(2x^2-x)$; в) $f(x)=x^2(3x+x^3)$; г) $f(x)=(2x-3)(1-x^3)$.

**210.** а) $y=\frac{1+2x}{3-5x}$; б) $y=\frac{x^2}{2x-1}$; в) $y=\frac{3x-2}{5x+8}$; г) $y=\frac{3-4x}{x^2}$.

**211.** а) $y=x^8-3x^4-x+5$; б) $y=\frac{x}{3}-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x}$; в) $y=x^7-4x^5+2x-1$; г) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x^3}+1$.

**212.** Вылічыце значэнні вытворнай функцыі $f$ у дадзеных пунктах:

а) $f(x)=x^2-3x$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=2$;

б) $f(x)=x-4\sqrt{x}$, $x=0{,}01$, $x=4$;

в) $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $f(x)=\frac{3-x}{2+x}$, $x=-3$, $x=0$.

**213.** Рашыце ўраўненне $f'(x)=0$, калі:

а) $f(x)=2x^2-x$; б) $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2+12$; в) $f(x)=\frac{x^3}{3}-1{,}5x^2-4x$; г) $f(x)=2x-5x^2$.



**214.** Рашыце няроўнасць $f'(x)<0$, калі:

а) $f(x)=4x-3x^2$; б) $f(x)=x^3+1{,}5x^2$; в) $f(x)=x^2-5x$; г) $f(x)=4x-\frac{1}{3}x^3$.

**215.** Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1+4x^5}$; б) $f(x)=\left(\frac{3}{x}+x^2\right)(2-\sqrt{x})$; в) $f(x)=\frac{5-2x^6}{1-x^3}$; г) $f(x)=\sqrt{x}(3x^5-x)$.

**216.** Знайдзіце значэнні $x$, пры якіх вытворная функцыі $f$ роўна нулю:

а) $f(x)=x^5-3\frac{1}{3}x^3+5x$; б) $f(x)=2x^4-x^8$; в) $f(x)=x^4+4x$; г) $f(x)=x^4-12x^2$.

**217.** Рашыце няроўнасць $f'(x)<0$, калі:

а) $f(x)=x^3-6x^2-63x$; б) $f(x)=3x-5x^2+x^3$; в) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x$; г) $f(x)=3x^2-9x-\frac{1}{3}x^3$.

**218.** Задайце формулай хоць бы адну функцыю, вытворная якой роўна:

а) $2x+3$; б) $16x^3-0{,}4$; в) $8x-2$; г) $9x^2-\frac{1}{2}$.

**219.** Ці правільна, што функцыя $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ не мае вытворнай у пункце $x_0$, калі вядома, што:

а) кожная з функцый $f_1(x)$ і $f_2(x)$ не мае вытворнай у пункце $x_0$;

б) $f_1(x)$ мае вытворную ў пункце $x_0$, а $f_2(x)$ не мае?

## 16. Вытворная складанай функцыі

**1. Складаная функцыя.** Пачнём з разгляду прыкладу.

○ Прыклад 1. Няхай трэба вылічыць па зададзенаму значэнню $x$ адпаведнае значэнне $z$ функцыі $h$, зададзенай формулай

$$z=h(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Для гэтага трэба спачатку вылічыць па зададзенаму $x$ значэнне

$$y=f(x)=1-x^2,$$

а потым ужо па гэтаму $y$ вылічыць

$$z=g(y)=\sqrt{y}.$$

Такім чынам, функцыя $f$ ставіць у адпаведнасць з лікам $x$ лік $y$, а функцыя $g$ — з лікам $y$ лік $z$. Гавораць, што $h$ ёсць *складаная функцыя*, састаўленая з функцый $g$ і $f$, і пішуць:

$$h(x)=g(f(x)).$$

Каб вылічыць значэнне складанай функцыі $h(x)=g(f(x))$ у адвольным пункце $x$, спачатку вылічваюць значэнне $y$ «унутраной» функцыі $f$ у гэтым пункце, а потым $g(y)$.

Якая вобласць вызначэння складанай функцыі $g(f(x))$? Гэта мноства ўсіх тых $x$ з вобласці вызначэння функцыі $f$, для якіх $f(x)$ уваходзіць у вобласць вызначэння функцыі $g$.

У разглядаемым прыкладзе вобласцю вызначэння функцыі $f$ з'яўляецца ўся лікавая прамая. Значэнне $h(x)$ вызначана, калі значэнне $f(x)$ належыць вобласці вызначэння функцыі $g(y)=\sqrt{y}$. Таму трэба, каб выконвалася няроўнасць $y\geqslant 0$, г. зн. $1-x^2\geqslant 0$, і, значыць, вобласць вызначэння функцыі $g(f(x))$ — гэта адрэзак $[-1;\ 1]$. ●

**2. Формула вытворнай складанай функцыі.** У папярэдніх пунктах вы навучыліся знаходзіць вытворныя рацыянальных функцый, у прыватнасці мнагачленаў. Аднак задача вылічэння вытворнай функцыі $f(x)=(2x+3)^{100}$, хоць і зводзіцца да знаходжання вытворнай мнагачлена, патрабуе вельмі вялікага аб'ёму работы: трэба запісаць $(2x+3)^{100}$ у выглядзе мнагачлена і прадыферэнцыраваць 101 складаемае атрыманай сумы. Можна прыметна спрасціць рашэнне гэтай і многіх іншых задач, даказаўшы правіла вылічэння вытворнай складанай функцыі.

*Калі функцыя $f$ мае вытворную ў пункце $x_0$, а функцыя $g$ мае вытворную ў пункце $y_0=f(x_0)$, то складаная функцыя $h(x)=g(f(x))$ таксама мае вытворную ў пункце $x_0$, прычым*

$$\boldsymbol{h'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).} \tag{1}$$

▽ Для доказу формулы (1) трэба (як і раней) пры $\Delta x\neq 0$ разгледзець дроб $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ і ўстанавіць, што $\frac{\Delta h}{\Delta x}\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$. Увядзём абазначэнні

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f.$$

Тады $\Delta h=h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=\Delta g$.

$\Delta y\to 0$ пры $\Delta x\to 0$, паколькі $f$ дыферэнцыруемая ў пункце $x_0$.

Далей доказ правядзём толькі для такіх функцый $f$, у якіх $\Delta f\neq 0$ у некаторым наваколлі пункта $x_0$. Тады $\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{\Delta h}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta g}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}\to g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$, паколькі $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$, а $\frac{\Delta g}{\Delta y}\to g'(y_0)$ пры $\Delta y\to 0$, што выканана пры $\Delta x\to 0$ (як гэта адзначалася вышэй). ▲



Прыклад 2. Вернемся да пастаўленай вышэй задачы і знойдзем вытворную функцыі $h(x)=(2x+3)^{100}$.

Функцыю $h$ можна запісаць у выглядзе складанай функцыі

$$h(x)=g(f(x)),\ \text{дзе}\ g(y)=y^{100},\ y=f(x)=2x+3.$$

Паколькі $f'(x)=2$ і $g'(y)=100y^{99}$, маем $h'(x)=2\cdot 100y^{99}=200(2x+3)^{99}$.

Прыклад 3. Знойдзем вытворную функцыі $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$.

Паколькі $h(x)=g(f(x))$, дзе $y=f(x)=3x^2+1$, $g(y)=\sqrt{y}$, то $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ і $y'=f'(x)=6x$, адкуль

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}.\ ●$$

### *Практыкаванні*

Задайце формуламі элементарныя функцыі $f$ і $g$, з якіх састаўлена складаная функцыя $h(x)=g(f(x))$ (220—221).

**220.** а) $h(x)=\cos 3x$; б) $h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $h(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $h(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

**221.** а) $h(x)=(3-5x)^5$; б) $h(x)=\sqrt{\cos x}$; в) $h(x)=(2x+1)^7$; г) $h(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

Знайдзіце вобласць вызначэння кожнай з функцый (222—223).

**222.** а) $y=\sqrt{9-x^2}$; б) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$; в) $y=\sqrt{0{,}25-x^2}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{4x+5-x^2}}$.

**223.** а) $y=\sqrt{\cos x}$; б) $y=\frac{1}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$; в) $y=\operatorname{tg} 2x$; г) $y=\sqrt{\sin x}$.

Знайдзіце вытворныя функцый (224—225).

**224.** а) $f(x)=(2x-7)^8$; б) $f(x)=\frac{1}{(5x+1)^3}$; в) $f(x)=(9x+5)^4$; г) $f(x)=\frac{1}{(6x-1)^5}$.

**225.** а) $f(x)=\left(3-\frac{x}{2}\right)^{-9}$; б) $f(x)=\left(\frac{1}{4}x-7\right)^{8}-(1-2x)^{4}$;
в) $f(x)=(4-1{,}5x)^{10}$; г) $f(x)=(5x-2)^{13}-(4x+7)^{-6}$.

**226.** Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $y=\sqrt{1-2\cos x}$; б) $y=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}$;

в) $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}$; г) $y=\sqrt{\frac{1}{x}+1}$.

**227.** Зададзены функцыі $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2$ і $p(x)=\sin x$. Задайце формулай складаную функцыю $h$, калі:

а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=g(p(x))$;
в) $h(x)=g(f(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$.

**228.** Зададзены функцыі $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ і $p(x)=\sqrt{x}$. Задайце формулай складаную функцыю $h$; знайдзіце яе вобласць вызначэння, калі:

а) $h(x)=f(g(x))$; б) $h(x)=f(p(x))$;
в) $h(x)=p(g(x))$; г) $h(x)=p(f(x))$.

**229.** Знайдзіце такую функцыю $f$, што $f(g(x))=x$:

а) $g(x)=2x$; б) $g(x)=\sqrt{x}$;
в) $g(x)=3x+2$; г) $g(x)=x^2+1$, $x\leqslant 0$.

**230.** Знайдзіце вытворную функцыі $f$:

а) $f(x)=(x^3-2x^2+3)^{17}$; б) $f(x)=\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{x^2+3}$;

в) $f(x)=\sqrt{4x^2+5}$; г) $f(x)=(3-x^3)^5+\sqrt{2x-7}$.

## 17. Вытворныя трыганаметрычных функцый

**1. Формула вытворнай сінуса.** Дакажам, што *функцыя сінус мае вытворную ў любым пункце і*

$$(\sin x)'=\cos x. \qquad (1)$$

Прымяняючы формулу $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, знаходзім:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}=\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$



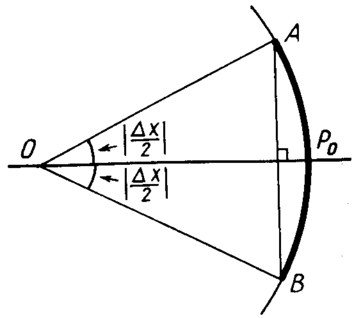
Для вываду формулы (1) дастаткова паказаць, што:

а) $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1$ пры $\Delta x\to 0$;

б) $\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\to\cos x_0$

пры $\Delta x\to 0$.

Абапіраючыся на гэтыя сцверджанні, можна атрымаць формулу (1). Сапраўды, пры $\Delta x\to 0$




Рыс. 88

$$\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\to 1\cdot\cos x_0=\cos x_0.$$

Сцверджанні а) і б), на якія мы абапіраліся вышэй, маюць наглядны геаметрычны сэнс.

а) Адкладзём на адзінкавай акружнасці ад пункта $P_0$ у абодва бакі дугі $P_0A$ і $P_0B$ даўжынёй $\frac{|\Delta x|}{2}$ (рыс. 88). Тады даўжыня дугі $AB$ роўна $|\Delta x|$, а даўжыня хорды $AB$ роўна $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$. Пры малых $|\Delta x|$ даўжыня хорды $AB$ практычна не адрозніваецца ад даўжыні сцягваемай ёю дугі $AB$. (Гэтым фактам вы ўжо карысталіся ў курсе геаметрыі пры выважзе формулы даўжыні акружнасці. Сапраўды, пры вялікіх $n$ правільная, як вядома, прыбліжаная роўнасць $P_n\approx C$, дзе $P_n$ — перыметр правільнага ўпісанага $n$-вугольніка, а $C$ — даўжыня акружнасці. Значыць, даўжыня стараны такога многавугольніка прыбліжана роўна даўжыні дугі, якую гэта старана сцягвае.) Значыць,

$$\frac{AB}{\smile AB}=\frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|}=\left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right|\to 1 \text{ пры } \Delta x\to 0.$$

б) Заўважым, што даўжыня хорды $AB$ меншая за даўжыню дугі $AB$, г. зн.

$$2\sin\frac{|\Delta x|}{2}<2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}.$$

Выкарыстаўшы формулу рознасці косінусаў і гэту няроўнасць, знаходзім:

$$\left|\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-\cos x_0\right|=\left|-2\sin\frac{\Delta x}{4}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{4}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|2\sin\frac{\Delta x}{4}\right|\leqslant\frac{|\Delta x|}{2}.$$

Але $\frac{|\Delta x|}{2} \to 0$ пры $\Delta x \to 0$. Таму $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x_0$ пры $\Delta x \to 0$. △

○ Прыклад. Па формуле дыферэнцыравання складанай функцыі

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b).$$

**2. Формулы дыферэнцыравання косінуса, тангенса і катангенса.** Дакажам, што *функцыі* $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ *маюць вытворныя ў кожным пункце сваёй вобласці вызначэння і справядлівыя формулы:*

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (2)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (3)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (4)$$

Вывад формулы (2) заснаваны на роўнасцях $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ і правіле дыферэнцыравання складанай функцыі:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Каб даказаць справядлівасць формул (3) і (4), прыменім формулу для знаходжання вытворнай дзелі і выведзеныя формулы вытворнай сінуса і косінуса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

### *Практыкаванні*

Знайдзіце вытворную кожнай з функцый (231—233).

**231.** а) $y = 2\sin x$; б) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin x$;
в) $y = -0{,}5\sin x$; г) $y = 0{,}5 + 1{,}5\sin x$.

**232.** а) $y = 3\cos x$; б) $y = x + 2\cos x$;
в) $y = 1 - \cos x$; г) $y = 2\sin x + 1{,}5\cos x$.



**233.** а) $y = \sqrt{3} - 3\operatorname{tg} x$; б) $y = \cos x - \operatorname{tg} x$;
в) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$; г) $y = 2\operatorname{tg} x - \sin x$.

**234.** Знайдзіце $f'(0)$ і $f'(\pi)$, калі:
а) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \pi)$; б) $f(x) = x - \operatorname{tg}(-2x)$;
в) $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$.

**235.** Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі:
а) $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$; б) $f(x) = x - \operatorname{tg} x$;
в) $f(x) = 2\sin x - 1$; г) $f(x) = x - \cos x$.

---

Знайдзіце вытворную кожнай з функцый (236—238).

**236.** а) $f(x) = x^3\sin 2x$; б) $f(x) = x^4 + \operatorname{tg} 2x$;
в) $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$; г) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

**237.** а) $f(x) = \sin^2 x$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
в) $f(x) = \cos^2 x$; г) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

**238.** а) $f(x) = \cos 2x\sin x + \sin 2x\cos x$;
б) $f(x) = \cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4}$;
в) $f(x) = \sin 5x\sin 3x + \cos 5x\cos 3x$;
г) $f(x) = \sin 3x\cos 3x$.

**239.** Знайдзіце пункты, у якіх $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, калі:
а) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}x$; б) $f(x) = 2x + \cos(4x - \pi)$;
в) $f(x) = \cos 2x$; г) $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$.

**240.** Задайце формулай хоць бы адну функцыю $f$, калі:
а) $f'(x) = 1 - \sin x$; б) $f'(x) = 2\cos 2x$;
в) $f'(x) = -\cos x$; г) $f'(x) = 3\sin x$.

## § 5. ПРЫМЯНЕННІ НЕПЕРАРЫЎНАСЦІ І ВЫТВОРНАЙ

### 18. Прымяненні неперарыўнасці

**1. Неперарыўнасць функцыі.** У п. 14 вы пазнаёміліся з паняццем неперарыўнасці функцыі ў пункце. Калі функцыя неперарыўная ў кожным пункце некаторага прамежку $I$, то яе называюць *неперарыўнай на прамежку* $I$ (прамежак $I$ называюць *прамежкам неперарыўнасці функцыі* $f$). Пры пераходзе ад аднаго пункта гэтага прамежку да блізкага да яго пункта значэнне функцыі мя-

няецца мала; графік $f$ на гэтым прамежку ўяўляе сабой неперарыўную лінію, пра якую гавораць, што яе можна «нарысаваць, не адрываючы карандаша ад паперы». (У такім стане, ва ўсякім выпадку, знаходзіцца справа для неперарыўных функцый, вывучаемых у школьным курсе.)

Як было паказана ў п. 15, функцыя, дыферэнцыруемая ў пункце $x_0$, неперарыўная ў гэтым пункце. Усе дробава-рацыянальныя і асноўныя трыганаметрычныя функцыі дыферэнцыруемыя ва ўсіх пунктах сваіх абласцей вызначэння. Значыць, гэтыя функцыі і неперарыўныя ў кожным з гэтых пунктаў.

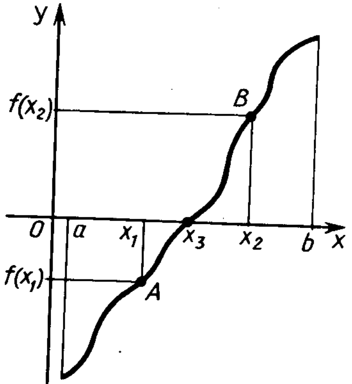
Напрыклад, з дыферэнцыруемасці функцыі $f(x)=x^2$ на ўсёй прамой, а функцыі $f(x)=\frac{1}{x}$ на прамежках $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$ вынікае неперарыўнасць гэтых функцый на адпаведных прамежках.

Адзначым наступную ўласцівасць неперарыўных функцый:

*Калі на інтэрвале $(a;\ b)$ функцыя $f$ неперарыўная і не ператвараецца ў нуль, то яна на гэтым інтэрвале захоўвае пастаянны знак.* Гэта сцверджанне мае наглядныя ўяўленні. Дапусцім, што знойдуцца такія пункты $x_1$ і $x_2$ інтэрвалу $(a;\ b)$, што $f(x_1)<0$, а $f(x_2)>0$.

Тады неперарыўная крывая (графік функцыі $f$), якая злучае пункты $A(x_1;\ f(x_1))$ і $B(x_2;\ f(x_2))$, раздзеленыя прамой $y=0$, перасякае гэту прамую ў некаторым пункце $x_3$ дадзенага інтэрвалу (рыс. 89), г. зн. $f(x_3)=0$. (Уявім сабе, што пункты $A$ і $B$ знаходзяцца на розных берагах ракі, паказанай інтэрвалам $(a;\ b)$. Зразумела, што турысту, для таго каб папасці з $A$ ў $B$, трэба дзесьці перайсці раку.) Гэта супярэчыць умове: функцыя $f$ не ператвараецца на інтэрвале $(a;\ b)$ у нуль.

**2. Метад інтэрвалаў.** На ўласцівасці неперарыўных функцый, разгледжанай у гэтым пункце (яе поўны доказ прыводзіцца ў курсах матэматычнага аналізу), заснаваны метад рашэння няроўнасцей з адной пераменнай (*метад інтэрвалаў*). Апішам яго.



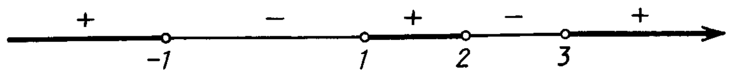
Рыс. 89

Няхай функцыя $f$ неперарыўная на інтэрвале $I$ і ператвараецца ў нуль у канечным ліку пунктаў гэтага інтэрвалу. Па сфармуляванай вышэй уласцівасці неперарыўных функцый гэтымі пунктамі $I$ разбіваецца на інтэрвалы, у кожным з якіх неперарыўная функцыя $f$ захоўвае пастаянны знак. Каб вызначыць гэты знак, дастаткова вылічыць значэнне функцыі $f$ у якім-небудзь адным пункце з кожнага такога інтэрвалу.

Прыклад 1. Рэшым няроўнасць

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}\geqslant 0.$$





Рыс. 90

Функцыя $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ неперарыўная ў кожным пункце сваёй вобласці вызначэння (гэта дробава-рацыянальная функцыя) і ператвараецца ў нуль у пунктах $-1$ і $1$. Вобласць вызначэння гэтай функцыі — уся лікавая прамая, за выключэннем нулёў назоўніка, г. зн. пунктаў 2 і 3. Гэтыя пункты і пункты $-1$ і $1$ разбіваюць вобласць вызначэння $f$ на 5 прамежкаў (рыс. 90), у кожным з якіх функцыя $f$ неперарыўная і не ператвараецца ў нуль. На рысунку адзначаны знак $f$ у кожным з адпаведных інтэрвалаў, які вызначаем, знайшоўшы знакі значэнняў $f$ ва ўнутраных пунктах інтэрвалаў. Няроўнасць нястрогая, таму лікі $-1$ і $1$ (нулі функцыі $f$) з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці. Разглядаючы рысунак, можна запісаць адказ: мноства рашэнняў няроўнасці — аб'яднанне прамежкаў $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ 2)$ і $(3;\ \infty)$.

Прыклад 2. Знойдзем адзін з каранёў ураўнення $x^3+2x-2=0$ з дакладнасцю да 0,1.

Функцыя $f(x)=x^3+2x-2$ неперарыўная, таму дастаткова знайсці адрэзак даўжынёй 0,2, на канцах якога $f$ мае значэнні розных знакаў. Маем $f(1)=1>0$, $f(0)=-2<0$, таму корань ураўнення існуе і ён належыць адрэзку $[0;\ 1]$. $f(0,6)=0,6^3+2\cdot 0,6-2=-0,584<0$ і $f(1)>0$, значыць, корань ляжыць на адрэзку $[0,6;\ 1]$. Нарэшце, $f(0,8)=0,112>0$, а $f(0,6)<0$, атрымалі, што корань на адрэзку $[0,6;\ 0,8]$. Цяпер мы можам яго знайсці: $x_0\approx 0,7$ з дакладнасцю да 0,1. ●

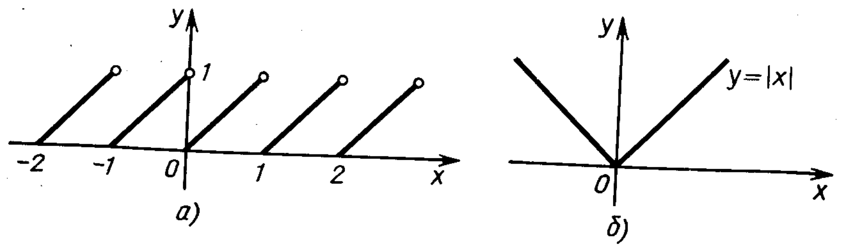
**3. Прыклад функцыі, якая не з'яўляецца неперарыўнай.** Практычна ўсе функцыі, з якімі вы сустракаліся да гэтага часу, неперарыўныя ў любым пункце сваёй вобласці вызначэння. Не трэба, аднак, лічыць, што гэта правільна для любой функцыі.

Прывядзём прыклад. Разгледзім функцыю $f(x)=\{x\}$, дзе $\{x\}$ — дробавая частка ліку $x$ (графік $f(x)=\{x\}$ паказаны на рысунку 91, *а*), і возьмем любы цэлалікавы пункт восі абсцыс, напрыклад $x=2$.

Асноўная ўласцівасць неперарыўнай у $x_0$ функцыі ($f(x_0+\Delta x)\to f(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$) у дадзеным выпадку не выконваецца. Сапраўды, няхай $\Delta x\to 0$. Калі $\Delta x>0$, то значэнні $\{x_0+\Delta x\}$ блізкія да нуля. Калі ж $\Delta x<0$, то значэнні $\{x_0+\Delta x\}$ блізкія да 1. У той жа час функцыя $f(x)=\{x\}$ неперарыўная ва ўсіх пунктах, якія адрозніваюцца ад пунктаў $x=n$, дзе $n$ — цэлы лік.

Гэту ўласцівасць функцыі $f(x)=\{x\}$ няцяжка зразумець, разгледзеўшы рысунак 91, *а*.

**4. Прыклад функцыі неперарыўнай, але не дыферэнцыруемай у дадзеным пункце.** Прыкладам такой функцыі з'яўляецца




Рыс. 91

функцыя $f(x)=|x|$ (рыс. 91, *б*), якая непарарыўная, але не дыферэнцыруемая ў нулі. Напомнім, што

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{калі } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{калі } x<0.\end{cases}$$

Непарарыўнасць функцыі $f(x)=|x|$ у любым пункце (у тым ліку і ў нулі) відавочна.

Разгледзім графік гэтай функцыі. Для любога $x>0$ у некаторым наваколлі пункта $x_0>0$ функцыя роўна $x$, і таму вытворная яе ў такіх пунктах роўна $x'$, г. зн. $|x|'=1$ пры $x>0$. Паколькі $|x|=-x$ пры $x<0$, то $|x|'=-1$ пры адмоўных значэннях $x$. У пункце 0 функцыя $f(x)=|x|$ не мае вытворнай.

▽ Дакажам гэта метадам ад процілеглага. Дапусцім, што $f(x)=|x|$ мае вытворную ў нулі, г. зн. $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ імкнецца да некаторага ліку $A$ пры $\Delta x\to 0$. Тады пры ўсіх дастаткова малых $|\Delta x|$ значэнні $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ блізкія да $A$, і, у прыватнасці, пры малых значэннях $\Delta x$ павінна выконвацца няроўнасць $\left|\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}-A\right|<1$.

Пры $\Delta x>0$ справядлівая няроўнасць $|1-A|<1$, адкуль $-1<1-A<1$, г. зн.

$$0<A<2. \qquad (1)$$

Для $\Delta x<0$ справядлівая няроўнасць $|-1-A|<1$, адкуль $-1<-1-A<1$, г. зн.

$$-2<A<0. \qquad (2)$$

Няроўнасці (1) і (2) супярэчлівыя. Значыць, наша дапушчэнне аб існаванні вытворнай функцыі $f(x)=|x|$ у нулі няправільнае. ▲

Такім чынам,

$$|x|'=\begin{cases} 1 \text{ пры } x>0,\\ \text{не існуе пры } x=0,\\ -1 \text{ пры } x<0.\end{cases}$$



### *Практыкаванні*

**241.** Ці з'яўляецца функцыя $f$ непарарыўнай у пунктах $x_1=0$ і $x_2=-1$, калі:

а) $f(x)=x^4-x+1$;  б) $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ пры } x\leqslant -1,\\ x^2-x \text{ пры } x>-1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 \text{ пры } x<0,\\ 5-2x \text{ пры } x\geqslant 0;\end{cases}$  г) $f(x)=2x-x^2+x^3$?

**242.** Знайдзіце прамежкі непарарыўнасці функцыі:

а) $f(x)=x^3-2x^2$;  б) $f(x)=\frac{x^3+27}{3x+x^2}$;

в) $f(x)=2x^4-3x^2+4$;  г) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^3-8}$.

**243.** Дакажыце, што дадзенае ўраўненне мае корань, які належыць адрэзку $[0;\ 1]$, і знайдзіце яго з дакладнасцю да 0,1:

а) $1{,}4-10x^2-x^3=0$;  б) $1+2x^2-100x^4=0$;

в) $x^3-5x+3=0$;  г) $x^4+2x-0{,}5=0$.

Рашыце няроўнасці (244—245).

**244.** а) $x^2-5x+4>0$;  б) $\frac{x+3}{x^2+4x-5}\geqslant 0$;

в) $x^2-3x-4\leqslant 0$;  г) $\frac{x^2-7x+6}{x-2}<0$.

**245.** а) $\frac{(x-2)(x-4)}{x^2+2x-3}\geqslant 0$;  б) $\frac{8}{x^2-6x+8}<1$;

в) $\frac{2x^2+5x}{x^2+5x+4}\geqslant 1$;  г) $\frac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)}<0$.

**246.** Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $f(x)=\sqrt{x-\frac{4}{x-3}}$;  б) $f(x)=\sqrt{\frac{3}{x^2-4}+1}$;

в) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+7x+12}{x}}$;  г) $f(x)=\sqrt{1-\frac{8}{x^2-1}}$.

---

**247.** Пры якіх значэннях $m$ функцыя $f$ непарарыўная на ўсёй лікавай прамой, калі:

а) $f(x)=\begin{cases} 4-x \text{ пры } x<4,\\ (x-m)^2 \text{ пры } x\geqslant 4;\end{cases}$  б) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2-m}$;

в) $f(x)=\begin{cases} 3x^2+m \text{ пры } x\leqslant 0,\\ x+2 \text{ пры } x>0;\end{cases}$  г) $f(x)=\frac{5-x}{x^4+m}$?

Рашыце няроўнасці (248—249).

**248.** а) $x^4-10x^2+9\leqslant 0$; б) $x^4-8\geqslant 7x^2$;

в) $x^4-5x^2+6>0$; г) $5x^2-4>x^4$.

**249.** а) $(x^2-1)(x+4)(x^3-8)\leqslant 0$; б) $\sqrt{x^2-4}\,(x-3)<0$;

в) $x^2(3-x)(x+2)>0$; г) $\frac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2}\geqslant 0$.

**250.** Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $f(x)=\sqrt{9x-x^3}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-\frac{8}{x}}$;

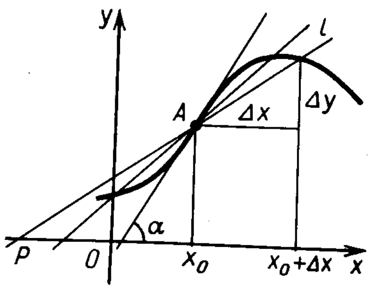
в) $f(x)=\sqrt{16x-x^3}$; г) $f(x)=\sqrt{1-\frac{27}{x^3}}$.

## 19. Датычная да графіка функцыі

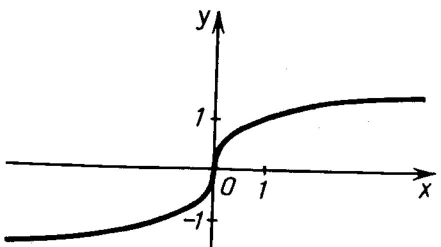
**1. Датычная.** З паняццем датычнай да графіка функцыі вы ўжо знаёмы. Графік дыферэнцыруемай у пункце $x_0$ функцыі $f$ блізка ад $x_0$ практычна не адрозніваецца ад адрэзка датычнай, а значыць, ён блізкі да адрэзка сякучай $l$, якая праходзіць праз пункты $(x_0;\ f(x_0))$ і $(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$. Любая з такіх сякучых праходзіць праз пункт $A(x_0;\ f(x_0))$ графіка (рыс. 92). Для таго каб адназначна задаць прамую, якая праходзіць праз дадзены пункт $A$, дастаткова назваць яе вуглавы каэфіцыент. Вуглавы каэфіцыент $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сякучай пры $\Delta x\to 0$ імкнецца да ліку $f'(x_0)$ (яго мы прымем за вуглавы каэфіцыент датычнай). Гавораць, што *датычная ёсць гранічнае становішча сякучай пры* $\Delta x\to 0$.

Калі ж $f'(x_0)$ не існуе, то датычная або не існуе (як у функцыі $y=|x|$ у пункце (0; 0), рыс. 91, *б*), або вертыкальная (як у графіка $y=\sqrt[3]{x}$ у пункце (0; 0), рыс. 93). ▲

Такім чынам, існаванне вытворнай функцыі $f$ у пункце $x_0$ эквівалентнае існаванню (невертыкальнай) датычнай у пункце $(x_0;\ f(x_0))$ графіка, прычым *вуглавы каэфіцыент датычнай* роўны

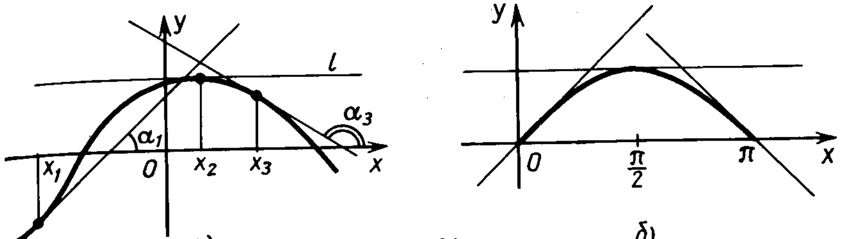



Рыс. 92




Рыс. 93






а) Рыс. 94 б)

$f'(x_0)$. У гэтым і заключаецца *геаметрычны сэнс вытворнай.*

*Датычная да графіка дыферэнцыруемай у пункце $x_0$ функцыі $f$ — гэта прамая, якая праходзіць праз пункт $(x_0;\ f(x_0))$ і мае вуглавы каэфіцыент $f'(x_0)$.*

Правядзём датычныя да графіка функцыі $f$ у пунктах $x_1$, $x_2$, $x_3$ (рыс. 94, *а*) і адзначым вуглы, якія яны ўтвараюць з воссю абсцыс. (Гэта вугал, які адлічваецца ў дадатным напрамку ад дадатнага напрамку восі да прамой.) Мы бачым, што вугал $\alpha_1$ востры, вугал $\alpha_3$ тупы, а вугал $\alpha_2$ роўны нулю, паколькі прамая $l$ паралельная восі $Ox$. Тангенс вострага вугла дадатны, тупога — адмоўны, $\operatorname{tg} 0=0$. Таму

$$f'(x_1)>0,\ f'(x_2)=0,\ f'(x_3)<0.$$

Пабудаванне датычных у асобных пунктах дазваляе больш дакладна будаваць эскізы графікаў. Так, напрыклад, для пабудавання эскіза графіка функцыі сінус папярэдне знаходзім, што ў пунктах 0; $\frac{\pi}{2}$ і $\pi$ вытворная сінуса роўна 1; 0 і $-1$ адпаведна. Пабудуем прамыя, якія праходзяць праз пункты (0; 0), $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$ і $(\pi;\ 0)$ з вуглавымі каэфіцыентамі 1, 0 і $-1$ адпаведна (рыс. 94, *б*). Застаецца ўпісаць у атрыманую трапецыю, утвораную гэтымі прамымі і прамой $Ox$, графік сінуса так, каб пры $x$, роўным 0, $\frac{\pi}{2}$ і $\pi$, ён датыкаўся да адпаведных прамых.

Адзначым, што графік сінуса ў наваколлі нуля практычна не адрозніваецца ад прамой $y=x$. Няхай, напрыклад, маштабы па восях выбраны так, што адзінцы адпавядае адрэзак у 1 см. Маем $\sin 0{,}5\approx 0{,}479425$, г. зн. $|\sin 0{,}5-0{,}5|\approx 0{,}02$, і ў выбраным маштабе гэта адпавядае адрэзку даўжынёй 0,2 мм. Таму графік функцыі $y=\sin x$ у інтэрвале $(-0{,}5;\ 0{,}5)$ будзе адхіляцца (у вертыкальным напрамку) ад прамой $y=x$ не больш, чым на 0,2 мм, што прыкладна адпавядае таўшчыні праводзімай лініі.

**2. Ураўненне датычнай.** Выведзем цяпер ураўненне датычнай да графіка функцыі $f$ у пункце $A(x_0;\ f(x_0))$.

Ураўненне прамой з вуглавым каэфіцыентам $f'(x_0)$ мае выгляд:

$$y=f'(x_0)\cdot x+b.$$

Для вылічэння $b$ выкарыстаем тое, што датычная праходзіць праз пункт $A$:

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b, \text{ адкуль } b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0,$$

і, значыць, ураўненне датычнай такое:

$$y=f'(x_0)x-f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0),$$

або

$$\mathbf{y=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0).} \qquad (1)$$

○ Прыклад 1. Знойдзем ураўненне датычнай да графіка функцыі $f(x)=x^3-2x^2+1$ у пункце з абсцысай 2.

У гэтым прыкладзе $x_0=2$, $f(x_0)=f(2)=2^3-2\cdot 2^2+1=1$, $f'(x)=3x^2-4x$, $f'(x_0)=f'(2)=3\cdot 2^2-4\cdot 2=4$. Падстаўляючы гэтыя лікі ва ўраўненне (1), атрымліваем ураўненне

$$y=1+4(x-2), \text{ г. зн. } y=4x-7.$$

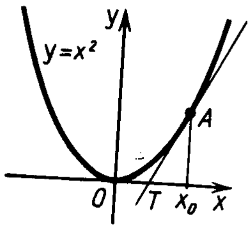
Прыклад 2. Выведзем ураўненне датычнай да парабалы $y=x^2$ у пункце з абсцысай $x_0$.

Маем $y(x_0)=x_0^2$, а $y'(x_0)=2x_0$. Падстаўляючы гэтыя значэнні ва ўраўненне (1) датычнай, атрымліваем: $y=x_0^2+2x_0(x-x_0)$, г. зн. $y=2x_0x-x_0^2$. Напрыклад, пры $x_0=1$ атрымліваем датычную, якая мае ўраўненне $y=2x-1$.

Знойдзем каардынаты пункта $T$ перасячэння датычнай да парабалы ў пункце $A(x_0;\ x_0^2)$ з воссю $Ox$ (рыс. 95). Калі $(x_1;\ 0)$ — каардынаты пункта $T$, то, паколькі $T$ належыць датычнай (і, значыць, яе каардынаты задавальняюць ураўненню датычнай), маем $0=2x_0x_1-x_0^2$. Калі $x_0\neq 0$, то $x_1=\frac{x_0}{2}$.

Атрыманы рэзультат дае просты спосаб пабудавання датычнай да парабалы ў любым яе пункце $A$ (акрамя вяршыні): дастаткова злучыць пункт $A$ з пунктам $T$, які дзеліць адрэзак восі $Ox$ з канцамі 0 і $x_0$ папалам; прамая $AT$ — шукаемая датычная. Пры $x_0=0$ датычная — гэта прамая $Ox$. ●

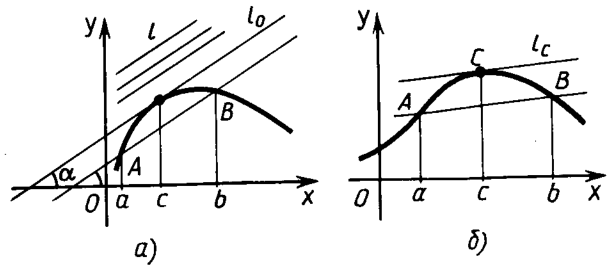
**3. Формула Лагранжа.** Выкарыстаем геаметрычны сэнс вытворнай, каб даць наглядныя тлумачэнні справядлівасці таго, што існуе датычная да графіка $f$ у пункце з абсцысай $c$ з інтэрвалу $(a;\ b)$, паралельная сякучай, якая праходзіць праз пункты $A(a;\ f(a))$, $B(b;\ f(b))$.




Рыс. 95

Разгледзім прамую $l$, якая паралельная $AB$ і не мае агульных пунктаў з часткай графіка, што адпавядае прамежку $[a;\ b]$. Будзем перамяшчаць гэту прамую $l$ па напрамку да графіка $f$ так, каб яна заставалася паралельнай $AB$. Зафіксуем становішча $l_0$ гэтай прамой у момант, калі ў яе з'явяцца агульныя пункты з гэтай часткай графіка. З рысунка 96, $a$ відаць, што любы з такіх «першых» агульных пунктаў — пункт дотыку прамой $l_0$






Рыс. 96

да графіка $f$. Абазначым абсцысу гэтага пункта праз $c$. Тады $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$, дзе $\alpha$ — вугал паміж прамой $l_0$ і воссю абсцыс. Але $l\parallel AB$, таму вугал $\alpha$ роўны вуглу нахілу сякучай $AB$, г. зн.

$$f'(c)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Такім чынам, калі функцыя дыферэнцыруемая, то на інтэрвале $(a;\ b)$ знойдзецца такі пункт $c\in(a;\ b)$ (рыс. 96, б), што

$$\mathbf{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$

Гэта формула называецца *формулай Лагранжа.*

### *Практыкаванні*

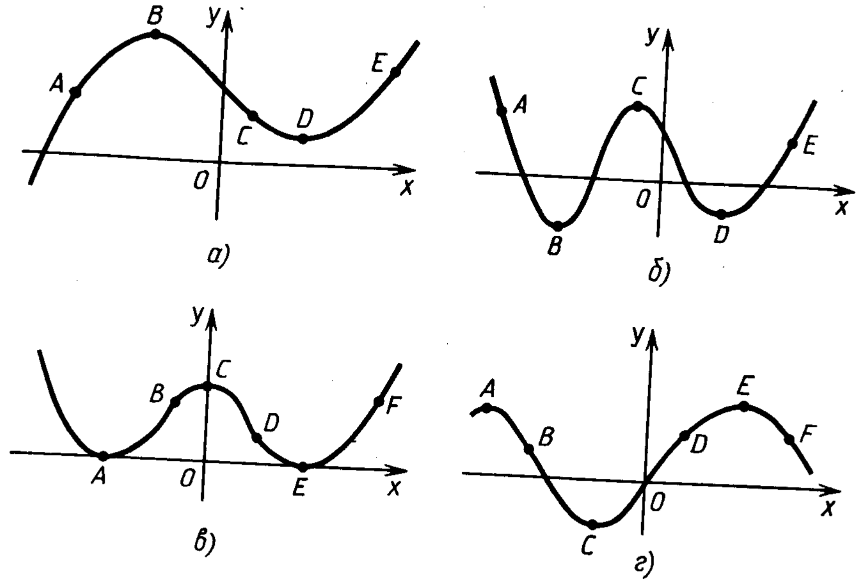
**251.** У якіх пунктах графіка функцыі $f$ (рыс. 97) датычная да яго:
а) гарызантальная;
б) утварае з воссю абсцыс востры вугал;
в) утварае з воссю абсцыс тупы вугал?

**252.** Пры якіх значэннях аргумента (адзначаных на восі абсцыс) вытворная функцыі, зададзенай графікам (рыс. 98): а) роўна нулю; б) большая за нуль; в) меншая за нуль?

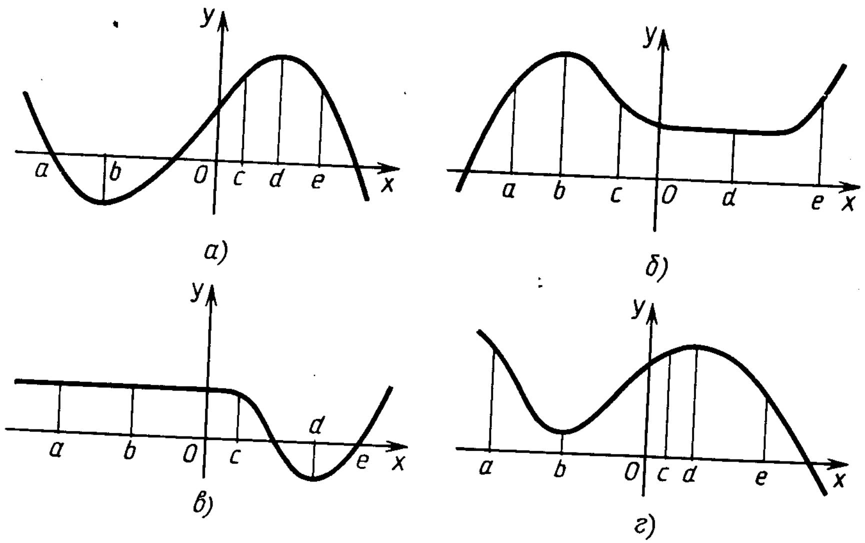
Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай, якая праходзіць праз дадзены пункт $M$ графіка функцыі $f$ (253—254).

**253.** а) $f(x)=x^2$, $M(-3;\ 9)$; б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$, $M\left(2;\ \frac{2}{3}\right)$;
в) $f(x)=x^3$, $M(-1;\ -1)$; г) $f(x)=x^2+2x$, $M(1;\ 3)$.

**254.** а) $f(x)=2\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; б) $f(x)=-\operatorname{tg}x$, $M(\pi;\ 0)$;
в) $f(x)=1+\sin x$, $M(\pi;\ 1)$; г) $f(x)=-\cos x$, $M(-\pi;\ 1)$.




Рыс. 97




Рыс. 98

Напішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f$ у пункце з абсцысай $x_0$ (255—256).

**255.** а) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-1$, $x_0=1$;

б) $f(x)=2x-x^2$, $x_0=0$, $x_0=2$;



в) $f(x)=x^2+1$, $x_0=0$, $x_0=1$;

г) $f(x)=x^3-1$, $x_0=-1$, $x_0=2$.

**256.** а) $f(x)=3\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$, $x_0=\pi$;

б) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

в) $f(x)=1+\cos x$, $x_0=0$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

г) $f(x)=-2\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{2}$, $x_0=\pi$.

---

Знайдзіце пункты графіка функцыі $f$, у якіх датычная паралельная восі абсцыс (257—258).

**257.** а) $f(x)=x^3-3x^2+3x$; б) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+16x$;

в) $f(x)=3x^4-6x^2+2$; г) $f(x)=x^3-3x+1$.

**258.** а) $f(x)=2\cos x+x$; б) $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}x$;

в) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x)=\sqrt{2}x-2\sin x$.

**259.** Пад якім вуглом перасякаецца з воссю $Ox$ графік функцыі:

а) $f(x)=3x-x^3$; б) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x)=x^2-3x+2$; г) $f(x)=-\cos x$?

**260.** Пад якім вуглом перасякаецца з воссю $Oy$ графік функцыі:

а) $f(x)=\frac{1}{x-1}$; б) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$; г) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$?

## 20. Прыбліжаныя вылічэнні

Няхай, напрыклад, патрабуецца вылічыць прыбліжанае значэнне функцыі

$$f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$$

у пункце $x=2{,}02$. Значэнне $f$ у блізкім да 2,02 пункце $x_0=2$ знаходзіцца лёгка: $f(2)=13$. Графік $f$ у наваколлі пункта 2 блізкі да прамой $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ — датычнай да яго ў пункце з абсцысай 2. Таму $f(2{,}02)\approx y(2{,}02)$. Маем $f'(x)=7x^6-12x^5+6x-1$, $f'(x_0)=f'(2)=75$ і $f(x)\approx y(x)=13+75\cdot 0{,}02=14{,}5$.

Вылічэнні на калькулятары даюць рэзультат $f(2{,}02)\approx 14{,}57995$.

Наогул для дыферэнцыруемай у пункце $x_0$ функцыі $f$ пры $\Delta x$, якія мала адрозніваюцца ад нуля, яе графік блізкі да датычнай (якая праведзена ў пункце графіка з абсцысай $x_0$), г. зн. пры малых $\Delta x$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (1)$$

Калі пункт $x_0$ такі, што значэнні $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ няцяжка вылічыць, то формула (1) дазваляе знаходзіць прыбліжаныя значэнні $f(x)$ пры $x$, дастаткова блізкіх да $x_0$. Так, пры вылічэнні значэння $\sqrt{4{,}08}$ натуральна ўзяць у якасці $x_0$ лік 4, паколькі 4,08 блізкі да 4 і значэнні $f(x_0)=\sqrt{x_0}$ і $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ пры $x_0=4$ знайсці няцяжка: $f(4)=\sqrt{4}=2$, $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$. Па формуле (1) пры $\Delta x=0{,}08$ атрымліваем:

$$\sqrt{4{,}08}\approx 2+\frac{1}{4}\cdot 0{,}08=2{,}02.$$

○ Прыклад 1. Выведзем з формулы (1) прыбліжаную формулу

$$\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x. \qquad (2)$$

Возьмем $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$ і $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$. Маем $f(x_0)=\sqrt{1}=1$ і $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, адкуль $f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}$. Па формуле (1)

$$f(x)=\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\Delta x.$$

У прыватнасці, $\sqrt{1{,}06}=\sqrt{1+0{,}06}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}06=1{,}03.$

Значэнне $\sqrt{4{,}08}$ таксама можна знайсці па формуле (2):

$$\sqrt{4{,}08}=2\sqrt{1{,}02}\approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02\right)=2{,}02.$$

Прыклад 2. Выведзем з формулы (1) прыбліжаную формулу

$$(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x. \qquad (3)$$

Мяркуем $f(x)=x^n$, $x_0=1$ і $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$. Знаходзім $f(x_0)=1$, $f'(x)=nx^{n-1}$, адкуль $f'(x_0)=n$. Па формуле (1)

$$f(x)=(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x.$$

Напрыклад, $1{,}001^{100}=(1+0{,}001)^{100}\approx 1+100\cdot 0{,}001=1{,}1.$

Значэнне $1{,}001^{100}$, вылічанае з дапамогай калькулятара, роўна 1,10512.

Прыклад 3. Для вылічэння значэння $\frac{1}{0{,}997^{30}}$ зручна выкарыстаць формулу (3) пры $n=-30$, $\Delta x=-0{,}003$:

$$\frac{1}{0{,}997^{30}}=(1-0{,}003)^{-30}\approx 1+(-30)\cdot(-0{,}003)=$$
$$=1+0{,}09=1{,}09. \bullet$$

Формулай (1) часта карыстаюцца для вылічэння прыбліжаных значэнняў і іншых элементарных функцый, напрыклад трыганаметрычных. Так, для вылічэння $\sin 1°$ зручна ўзяць $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, пры гэтым $\Delta x=\frac{\pi}{180}\left(\text{паколькі } 1°=\frac{\pi}{180}\right)$. Маем $f(x_0)=\sin 0=0$, $f'(x_0)=\cos 0=1$ і

$$\sin x\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=0+1\cdot\Delta x=\Delta x,$$

г. зн. $\sin 1°\approx\frac{\pi}{180}\approx 0{,}017453$. Вылічваючы значэнне $\sin 1°$ на калькулятары, атрымліваем $\sin 1°\approx 0{,}0174525$.



### *Практыкаванні*

**261.** Вылічыце з дапамогай формулы (1) прыбліжаныя значэнні функцыі $f$ у пунктах $x_1$ і $x_2$:

а) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2{,}016$, $x_2=0{,}97$;
б) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1{,}995$, $x_2=0{,}96$;
в) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3{,}02$, $x_2=0{,}92$;
г) $f(x)=x^2+3x$, $x_1=5{,}04$, $x_2=1{,}98$.

Вылічыце з дапамогай формул (1) і (3) прыбліжаныя значэнні (262—263).

**262.** а) $1{,}002^{100}$; б) $0{,}995^6$; в) $1{,}03^{200}$; г) $0{,}998^{20}$.

**263.** а) $\sqrt{1{,}004}$; б) $\sqrt{25{,}012}$; в) $\sqrt{0{,}997}$; г) $\sqrt{4{,}0016}$.

---

Вылічыце з дапамогай формулы (1) прыбліжаныя значэнні (264—266).

**264.** а) $\operatorname{tg} 44°$; б) $\cos 61°$; в) $\sin 31°$; г) $\operatorname{ctg} 47°$.

**265.** а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0{,}04\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0{,}02\right)$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0{,}03\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}05\right)$.

**266.** а) $\frac{1}{1{,}003^{20}}$; б) $\frac{1}{0{,}996^{40}}$; в) $\frac{1}{2{,}0016^3}$; г) $\frac{1}{0{,}994^5}$.

## 21. Вытворная ў фізіцы і тэхніцы

**1. Механічны сэнс вытворнай.** Напомнім, як вызначалася скорасць руху ў курсе фізікі. Разгледзім самы просты выпадак: матэрыяльны пункт рухаецца па каардынатнай прамой, прычым зададзены закон руху, г. зн. каардыната $x$ гэтага пункта ёсць вядомая функцыя $x(t)$ часу $t$. За прамежак часу ад $t_0$ да $t_0+\Delta t$ перамяшчэнне пункта роўна $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$, а яго сярэдняя скорасць

$$v_{\text{сярэдн}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Пры $\Delta t < 0$ формула (1) таксама правільная: перамяшчэнне роўна $x(t_0) - x(t_0 + \Delta t) = -\Delta x$, а працягласць прамежку часу роўна $-\Delta t$.

Звычайна характар руху бывае такім, што пры малых $\Delta t$ сярэдняя скорасць практычна не мяняецца, г. зн. рух з вялікай ступенню дакладнасці можна лічыць раўнамерным (гл. прыклад п. 13). Іншымі словамі, значэнне сярэдняй скорасці пры $\Delta t \to 0$ імкнецца да некаторага зусім пэўнага значэння, якое і называюць *імгненнай скорасцю* $v(t_0)$ матэрыяльнага пункта ў момант часу $t_0$. Такім чынам,

$$v_{\text{сярэдн}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to v(t_0) \text{ пры } \Delta t \to 0.$$

Але па азначэнню вытворнай

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t_0) \text{ пры } \Delta t \to 0.$$

Таму лічаць, што імгненная скорасць $v(t)$ **вызначана** (толькі) **для любой дыферэнцыруемай функцыі $x(t)$, пры гэтым**

$$v(t) = x'(t). \tag{2}$$

Коратка гавораць: *вытворная ад каардынаты па часу ёсць скорасць*. У гэтым заключаецца *механічны сэнс вытворнай*.

Імгненная скорасць можа прымаць як дадатныя, так і адмоўныя значэнні і, вядома, значэнне 0. Калі скорасць на якім-небудзь прамежку часу $(t_1; t_2)$ дадатная, то пункт рухаецца ў дадатным напрамку, г. зн. каардыната расце з цягам часу, а калі $v(t)$ адмоўная, то каардыната $x(t)$ убывае.

Аналагічная справа і з паскарэннем руху. Скорасць руху пункта ёсць функцыя ад часу $t$. А вытворная гэтай функцыі называецца *паскарэннем* руху:

$$a = v'(t).$$

Коратка гавораць: *вытворная ад скорасці па часу ёсць паскарэнне*.

○ Прыклад 1. Разгледзім свабоднае падзенне матэрыяльнага пункта. Калі каардынатную прамую накіраваць вертыкальна ўніз, а пачатковае становішча матэрыяльнага пункта супадае з 0, то, як вядома з фізікі, $x(t) = \frac{gt^2}{2}$. Тады скорасць падзення пункта ў момант часу $t$ роўна

$$v = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt,$$

а паскарэнне $a = (gt)' = g$ ёсць велічыня пастаянная.

Разгледзім больш агульны выпадак.



Прыклад 2. Няхай залежнасць каардынаты пункта, які рухаецца па прамой, ад часу выражаецца формулай

$$x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 t + x_0,$$

дзе $a \neq 0$, $v_0$ і $x_0$ — пастаянныя. Знойдзем скорасць і паскарэнне руху.

Скорасць гэтага руху:

$$v = x'(t) = \left(\frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0\right)' = 2 \cdot \frac{a}{2} t + v_0 = at + v_0.$$

Паколькі нам вядома скорасць руху як функцыя часу, то мы можам знайсці паскарэнне гэтага руху: $v'(t) = (at + v_0)' = a$. Мы бачым, што паскарэнне пры руху па квадратычнаму закону пастаяннае і роўнае $a$. Калі $a > 0$, то гэта роўнапаскораны рух, калі ж $a < 0$, то роўназапаволены. Адзначым таксама, што $v_0 = v(0)$, а $x_0 = x(0)$. ●

У раздзеле III мы дакажам, што калі пры руху па прамой паскарэнне $a$ пастаяннае, то рух адбываецца па квадратычнаму закону:

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0,$$

дзе $v_0$ — пачатковая скорасць пункта, а $x_0$ — пачатковая каардыната.

▽ Няхай $y = f(x)$ — адвольная дыферэнцыруемая функцыя. Тады мы можам разгледзець рух матэрыяльнага пункта па каардынатнай прамой, які адбываецца згодна з законам $x = f(t)$. Механічны сэнс вытворнай дазваляе даць наглядную інтэрпрэтацыю тэарэм дыферэнцыяльнага злічэння.

○ Прыклад 3. Няхай $f$ і $h$ — дзве дыферэнцыруемыя функцыі. Разгледзім наступны (адносны) рух па прамой. Дадзена рухомая сістэма каардынат, звязаная з поездам, пачатак якой (кабіна машыніста) рухаецца адносна пачатку нерухомай сістэмы каардынат (станцыі) па закону $x_1 = f(t)$. У рухомай сістэме каардынат матэрыяльны пункт выконвае рух па закону $x_2 = h(t)$. Тады каардыната $x$ гэтага пункта адносна нерухомай сістэмы каардынат роўна $x = x_1 + x_2$, а яго скорасць $v(t) = x'(t)$. З другога боку, па закону складання скарасцей $v(t) = v_1(t) + v_2(t) = x_1'(t) + x_2'(t)$. Такім чынам, мы атрымалі з дапамогай механічнага сэнсу вытворнай вядомую формулу:

$$(f + h)' = f' + h'.$$

Прыклад 4. Няхай матэрыяльны пункт рухаецца па каардынатнай прамой згодна з законам $x = f(t)$.

Сярэдняя скорасць гэтага пункта на прамежку $[a; b]$ роўна

$$v_{\text{сярэдн}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Імгненная скорасць $v(t)$ у пунктах прамежку $[a;\ b]$ не можа быць увесь час меншай (большай) за сярэднюю. Значыць, у нейкі момант $t_0 \in [a;\ b]$ імгненная скорасць роўна сярэдняй, г. зн. у прамежку $[a;\ b]$ знойдзецца такое $t_0$, што

$$v(t_0) = f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \bullet \qquad (3)$$

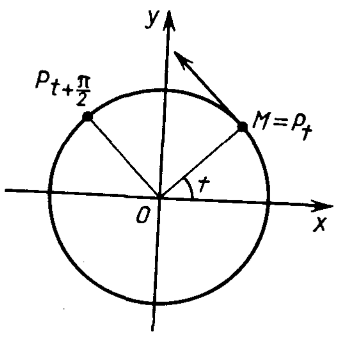
Мы атрымалі механічную інтэрпрэтацыю формулы Лагранжа. ▲

**2. Прыклады прымянення вытворнай.** З дапамогай вытворных функцый, якія характарызуюць фізічныя з'явы, задаюцца і іншыя фізічныя велічыні. Напрыклад, магутнасць (па азначэнню) ёсць вытворная работы па часу. Разгледзім яшчэ адзін прыклад.

○ Прыклад 5. Няхай дадзен неаднародны стрыжань, прычым вядома маса $m(l)$ любога яго кавалка даўжынёй $l$ ($l$ адлічваецца ад фіксаванага канца стрыжня). Хаця стрыжань неаднародны, натуральна дапускаць, што шчыльнасць яго невялікай часткі (на ўчастку ад $l$ да $l + \Delta l$) прыкладна адна і тая ж $\left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right)$ і чым меншая $\Delta l$, тым у меншых межах на гэтым участку змяняецца шчыльнасць. Таму за характарыстыку размеркавання шчыльнасці стрыжня ў залежнасці ад $l$ прымаюць *лінейную шчыльнасць* $d(l) = m'(l)$.

Прыклад 6. У большасці задач механікі разглядаюцца рухі пункта на плоскасці або ў прасторы. Тады скорасць — вектарная велічыня. Аказваецца, што калі каардынаты пункта ў момант $t$ роўныя $x(t)$ і $y(t)$, то каардынаты вектара $\vec{v}(t)$ скорасці роўныя $x'(t)$ і $y'(t)$. Карыстаючыся гэтым, можна вывесці формулы вытворных трыганаметрычных функцый на аснове кінематыкі.

Разгледзім раўнамерны рух па акружнасці радыуса 1 у напрамку супраць гадзіннікавай стрэлкі з вуглавой скарасцю 1 (рыс. 99). Тады каардынаты пункта $M$ у момант часу $t$ наступныя: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Як вы ведаеце з курса фізікі, вектар скарасці $\vec{v}(t)$ накіраваны па датычнай да акружнасці, а яго даўжыня роўна $1$ $(|\vec{v}| = \omega R = 1 \cdot 1 = 1)$. Значыць, гэты вектар супадае з вектарам $\overrightarrow{OP}_{t+\frac{\pi}{2}}$, каардынаты якога роўныя $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ і $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$. З другога боку, каардынаты вектара $\vec{v}(t)$ роўныя адпаведна $x'(t)$ (г. зн. $\cos' t$) і $y'(t)$ (г. зн. $\sin' t$). Атрымліваем вядомыя формулы:




Рыс. 99

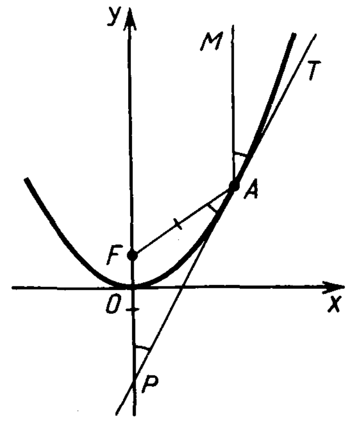


$$\cos' t = -\sin t,\quad \sin' t = \cos t.$$

Прыклад 7. Выведзем уласцівасць парабалы, якая мае прымяненне ў оптыцы і тэхніцы.

Паверхня, якая атрымліваецца пры вярчэнні парабалы $y = ax^2$ вакол восі $Oy$, называецца *парабалоідам* вярчэння. Уявім сабе, што ўнутраная паверхня парабалоіда — люстраная паверхня і гэта парабалічнае люстра асвятляецца пучком прамянёў святла, паралельных восі $Oy$.

Разгледзім сячэнне гэтага люстра плоскасцю $\alpha$, якая праходзіць праз вось $Oy$. Гэта сячэнне ўяўляе сабой такую ж парабалу $y = x^2$ (вось $Ox$ выбіраем у плоскасці сячэння, $a = 1$). Згодна з законам оптыкі адбіты прамень святла будзе ляжаць у плоскасці $\alpha$, прычым гэты прамень утварае з датычнай да парабалы такі ж вугал, як і прамень $MA$, што падае (рыс. 100).




Рыс. 100

▽ Дакажам, што ўсе прамяні, паралельныя восі $Oy$, пасля адбіцця перасякуцца ў адным пункце восі $Oy$.

Абазначым праз $F$ пункт перасячэння адвольнага адбітага праменя з воссю $Oy$. Прамая $AT$ — датычная да парабалы ў пункце $A$. З законаў адбіцця святла (гл. рыс. 100) адразу вынікае, што $\angle TAM = \angle FAP$. Але прамень $MA$ паралельны восі $Oy$, таму $\angle FPA = \angle TAM$. Значыць, $\angle FPA = \angle FAP$, г. зн. трохвугольнік $FPA$ — раўнабедраны і $FA = FP$. Пункт $A(x_0;\ y_0)$ ляжыць на парабале, таму $y_0 = x_0^2$. Ураўненне датычнай $AT$ мае выгляд $y = 2x_0x - x_0^2$. З яго знойдзем ардынату $y_P$ пункта $P$. Яна роўна $y_P = 2x_0 \cdot 0 - x_0^2$, г. зн. $y_P = -y_0$. Калі ардынату пункта $F$ абазначым $y$, то $FP = y + y_0$. Даўжыня $FA = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - y)^2}$, і таму (успомнім, што $FA = FP$) правільная роўнасць $(y + y_0)^2 = x_0^2 + (y_0 - y)^2$, г. зн. $y^2 + 2yy_0 + y_0^2 = y_0 + y_0^2 - 2yy_0 + y^2$, адкуль $4yy_0 = y_0$, і, паколькі $y_0 \neq 0$, атрымліваем $y = \frac{1}{4}$. ▲

Такім чынам, усе прамяні, паралельныя восі парабалічнага люстра, пасля адбіцця зыходзяцца ў адным пункце, які называюць *фокусам парабалічнага люстра* (пункт $F$ называюць таксама *фокусам парабалы* $y = x^2$).

На гэтай уласцівасці заснавана будова парабалічных тэлескопаў. Прамяні ад далёкіх зорак прыходзяць да нас у выглядзе паралельнага пучка. Зрабіўшы парабалічны тэлескоп і змясціўшы ў яго фокус фотапласцінку, мы атрымліваем магчымасць узмацніць светлавы сігнал, які ідзе ад зоркі. Гэты ж прынцып ляжыць у аснове стварэння парабалічных антэн, якія дазваляюць узмацніць радыёсігналы.

Калі ж змясціць у фокусе парабалічнага люстра крыніцу святла, то пасля адбіцця ад паверхні люстра прамяні, якія ідуць ад гэтай крыніцы, не будуць рассейвацца, а збяруцца ў вузкі пучок, паралельны восі люстра. Гэты факт знаходзіць прымяненне пры вырабе пражэктараў і ліхтароў, розных праектараў, люстры якіх часта вырабляюць у форме парабалоідаў. ●

### *Практыкаванні*

**267.** Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. а) Выведзіце формулу для вылічэння скорасці руху ў любы момант часу $t$. б) Знайдзіце скорасць у момант $t = 2$ с. (Перамяшчэнне вымяраецца ў метрах.) в) Праз колькі секунд пасля пачатку руху пункт спыніцца?

**268.** Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Знайдзіце скорасць і паскарэнне ў момант $t = 5$ с. (Перамяшчэнне вымяраецца ў метрах.)

**269.** Вярчэнне цела вакол восі адбываецца па закону $\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$. Знайдзіце вуглавую скорасць $\omega(t)$ у адвольны момант часу $t$ і пры $t = 4$ с. ($\varphi(t)$ — вугал ў радыянах, $\omega(t)$ — скорасць у радыянах у секунду, $t$ — час у секундах.)

**270.** Махавік, які затрымліваецца тормазам, за час $t$ паварочваецца на вугал $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$. Вызначце: а) вуглавую скорасць $\omega(t)$ вярчэння махавіка ў момант часу $t = 2$ с; б) такі момант часу, калі махавік спыніцца. ($\varphi(t)$ — вугал у радыянах, $t$ — час у секундах.)

---

**271.** Пункт рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = 2t^3 + t - 1$. Знайдзіце паскарэнне ў момант часу $t$. У які момант часу паскарэнне будзе роўна: а) 1 см/с$^2$; б) 2 см/с$^2$? ($x(t)$ — перамяшчэнне ў сантыметрах, $t$ — час у секундах.)

**272.** Пункт рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$ (час вымяраецца ў секундах, каардыната — у метрах). Знайдзіце: а) момант часу $t$, калі паскарэнне пункта роўна нулю; б) скорасць руху пункта ў гэты момант.

**273.** Пункт рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = \sqrt{t}$. Пакажыце, што яго паскарэнне прапарцыянальнае кубу скорасці.

**274.** Знайдзіце сілу $F$, якая дзейнічае на матэрыяльны пункт з масай $m$, што рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = 2t^3 - t^2$ пры $t = 2$.

**275.** Цела масай 2 кг рухаецца прамалінейна па закону $x(t) = t^2 + t + 1$. Каардыната $x$ вымяраецца ў сантыметрах, час $t$ — у секундах. Знайдзіце: а) сілу, якая дзейнічае; б) кінетычную энергію $E$ цела праз 2 с пасля пачатку руху.

**276.** Вядома, што для любога пункта $C$ стрыжня $AB$ даўжынёй 20 см, які знаходзіцца на адлегласці $l$ см ад пункта $A$, маса кавалка стрыжня $AC$ у грамах вызначаецца па формуле $m(l) = 3l^2 + 5l$. Знайдзіце лінейную шчыльнасць стрыжня: а) у сярэдзіне адрэзка $AB$; б) у канцы $B$ стрыжня.



**277.** Па прамой рухаюцца два матэрыяльныя пункты па законах $x_1(t) = 4t^2 - 3$ і $x_2(t) = t^3$. У якім прамежку часу скорасць першага пункта большая за скорасць другога пункта?

**278.** З пункта $O$ па двух праменях, вугал паміж якімі 60°, рухаюцца два целы: першае — раўнамерна са скорасцю 5 км/г, другое — па закону $s(t) = 2t^2 + t$. З якой скорасцю яны аддаляюцца адно ад аднаго? ($s$ вымяраецца ў кіламетрах, $t$ — у секундах.)

## § 6. ПРЫМЯНЕННІ ВЫТВОРНАЙ ДА ДАСЛЕДАВАННЯ ФУНКЦЫЙ

### 22. Прызнак узрастання (убывання) функцыі

У п. 6 вы бачылі, што адна з асноўных задач даследавання функцыі — гэта знаходжанне прамежкаў яе ўзрастання і ўбывання. Такое даследаванне лёгка правесці з дапамогай вытворнай. Сфармулюем адпаведныя сцверджанні.

Дастатковы прызнак узрастання функцыі. ***Калі $f'(x) > 0$ у кожным пункце інтэрвалу $I$, то функцыя $f$ узрастае на $I$.***

Дастатковы прызнак убывання функцыі. ***Калі $f'(x) < 0$ у кожным пункце інтэрвалу $I$, то функцыя $f$ убывае на $I$.***

Доказ гэтых прызнакаў праводзіцца на аснове формулы Лагранжа (гл. п. 19). Возьмем два любыя лікі $x_1$ і $x_2$ з інтэрвалу $I$. Няхай $x_1 < x_2$. Па формуле Лагранжа існуе лік $c \in (x_1; x_2)$, такі, што

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \qquad (1)$$

Лік $c$ належыць інтэрвалу $I$, паколькі пункты $x_1$ і $x_2$ належаць $I$. Калі $f'(x) > 0$ для $x \in I$, то $f'(c) > 0$, і таму $f(x_1) < f(x_2)$ — гэта вынікае з формулы (1), паколькі $x_2 - x_1 > 0$. Гэтым доказана ўзрастанне функцыі $f$ на $I$. Калі ж $f'(x) < 0$ для $x \in I$, то $f'(c) < 0$, і таму $f(x_1) > f(x_2)$ — гэта вынікае з формулы (1), паколькі $x_2 - x_1 > 0$. Гэтым доказана ўбыванне функцыі $f$ на $I$.

▽ Нагляднае сэнс прызнакаў зразумелы з такіх фізічных разважанняў (разгледзім для дакладнасці прызнак узрастання).

Няхай пункт, што рухаецца па восі ардынат, у момант часу $t$ мае ардынату $y = f(t)$. Тады скорасць гэтага пункта ў момант часу $t$ роўна $f'(t)$ (гл. п. 21). Калі $f'(t) > 0$ у кожны момант часу прамежку $I$, то пункт рухаецца ў дадатным напрамку восі ардынат, г. зн. калі $t_1 < t_2$, то $f(t_1) < f(t_2)$. Гэта азначае, што функцыя $f$ узрастае на прамежку $I$. ▲

○ Прыклад 1. Знойдзем прамежкі ўзрастання (убывання) і пабудуем графік функцыі $f(x) = x - x^3$.

Дадзеная функцыя вызначана на мностве ўсіх сапраўдных лікаў. З роўнасці $f'(x)=1-3x^2$ вынікае, што $f'(x)>0$, калі $1-3x^2>0$. Рашаючы гэту няроўнасць метадам інтэрвалаў (рыс. 101, *а*), атрымаем, што $f'(x)>0$ на інтэрвале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, і, значыць, на гэтым інтэрвале $f$ узрастае.

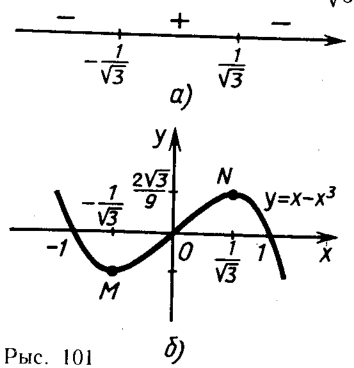
Аналагічна $f'(x)<0$ на інтэрвалах $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$, таму на гэтых інтэрвалах $f$ убывае. Далей вылічым значэнні $f$ у пунктах $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=-\frac{2}{3\sqrt{3}};$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

На каардынатнай плоскасці адзначым пункты $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ і $N\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ і нарысуем праходзячы праз іх графік функцыі, якая ўзрастае на інтэрвале $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ і ўбывае на інтэрвалах $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$ (рыс. 101, *б*).

З рысунка відаць, што функцыя $f$ неперарыўная ў пунктах $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{1}{\sqrt{3}}$, узрастае на адрэзку $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ і ўбывае на прамежках $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ і $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ \infty\right)$. ●




Рыс. 101

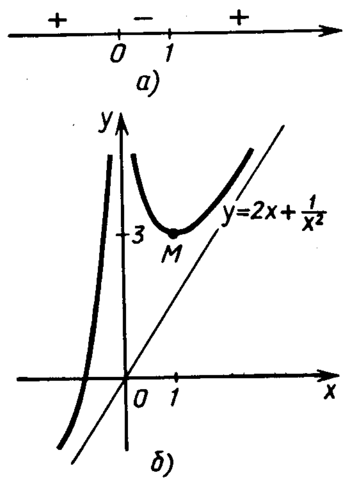
З а ў в а г а 1. Калі функцыя $f$ неперарыўная ў якім-небудзь з канцоў прамежку ўзрастання (убывання), то гэты пункт далучаюць да гэтага прамежку (як пункты $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{1}{\sqrt{3}}$ у прыкладзе 1).

Мы прымем гэты факт без доказу.

З а ў в а г а 2. Для рашэння няроўнасцей $f'(x)>0$ і $f'(x)<0$ зручна карыстацца абагульненнем метаду



інтэрвалаў (тэарэмай Дарбу): пункты, у якіх вытворная роўна 0 або не існуе, разбіваюць вобласць вызначэння функцыі $f$ на прамежкі, у кожным з якіх $f'$ захоўвае пастаянны знак. (Гэты факт даказваецца ў курсах матэматычнага аналізу.) Знак можна вызначыць, вылічыўшы значэнне $f'$ у якім-небудзь пункце прамежку.




Рыс. 102

○ П р ы к л а д 2. Знойдзем прамежкі ўзрастання (убывання) і пабудуем графік функцыі $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$.

Вобласць вызначэння дадзенай функцыі — аб'яднанне прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$; $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}$; $f'(x)=0$ пры $x=1$. Пункты 0 і 1 разбіваюць вобласць вызначэння функцыі $f$ на тры інтэрвалы: $(-\infty;0)$, $(0;1)$ і $(1;\infty)$. Згодна з заўвагай 2 у кожным з іх $f'$ захоўвае пастаянны знак. Знак вытворнай у кожным з гэтых інтэрвалаў адзначаны на рысунку 102, *а*.

Значыць, дадзеная функцыя ўзрастае на інтэрвалах $(-\infty;\ 0)$ і $(1;\ \infty)$. Паколькі $f$ неперарыўная ў пункце 1, то гэты пункт можна (з прычыны заўвагі 1) далучыць да прамежку, на якім функцыя $f$ узрастае.

Канчаткова атрымліваем, што $f$ узрастае на прамежку $(-\infty;0)$ і $[1;\ \infty)$. Далей, $f'(x)<0$ на інтэрвале $(0;\ 1)$, і таму (з улікам заўвагі 1) $f$ убывае на прамежку $(0;\ 1]$.

Пункт 0 не ўваходзіць у $D(f)$, аднак пры імкненні $x$ да 0 складаемае $\frac{1}{x^2}$ неабмежавана ўзрастае. Таму і значэнні $f$ неабмежавана ўзрастаюць. У пункце 1 функцыя прымае значэнне 3.

Адзначым цяпер на каардынатнай плоскасці пункт $M(1;\ 3)$ і нарысуем праходзячы праз яе графік функцыі, якая ўзрастае на прамежках $(-\infty;\ 0)$ і $[1;\ \infty)$ і ўбывае на прамежку $(0;\ 1]$ (рыс. 102, *б*).

П р ы к л а д 3. Знойдзем прамежкі ўзрастання (убывання) функцыі

$$f(x)=-2x+\sin x.$$

Функцыя вызначана на ўсёй лікавай прамой. Вытворная яе такая:

$$f'(x)=-2+\cos x.$$

Паколькі $|\cos x|\leqslant 1$, лёгка атрымліваем, што $f'(x)<0$ для ўсіх сапраўдных $x$. Гэта значыць, што функцыя $f(x)=-2x+\sin x$ убывае на ўсёй лікавай прамой. ●

### *Практыкаванні*

Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання функцый (279—281).

**279.** а) $f(x)=3-\frac{1}{2}x$; б) $f(x)=-x^2+2x-3$;
в) $f(x)=4x-5$; г) $f(x)=5x^2-3x+1$.

**280.** а) $f(x)=-\frac{2}{x}+1$; б) $f(x)=x^2(x-3)$;
в) $f(x)=\frac{x-3}{x}$; г) $f(x)=x^3-27x$.

**281.** а) $f(x)=12x+3x^2-2x^3$; б) $f(x)=4-x^4$;
в) $f(x)=x(x^2-12)$; г) $f(x)=\frac{3}{x^2}$.

**282.** Пабудуйце эскіз графіка функцыі $f$, якая задавальняе ўмовам:

а) $D(f)=[-2;\ 5]$, $f'(x)>0$ пры $x\in(-2;\ 5)$;
б) $D(f)=[1;\ 6]$, $f'(x)<0$ пры $x\in(1;\ 3)\cup(3;\ 6)$, $f'(3)=0$;
в) $D(f)=[-2;\ 5]$, $f'(x)>0$ пры $x\in(-2;\ 1)\cup(1;\ 5)$, $f'(1)=0$;
г) $D(f)=[1;\ 6]$, $f'(x)<0$ пры $x\in(1;\ 6)$.

---

Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання і пабудуйце графікі функцый (283—284).

**283.** а) $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$; б) $f(x)=4x^3-1{,}5x^4$;
в) $f(x)=2+9x+3x^2-x^3$; г) $f(x)=x^4-2x^2$.

**284.** а) $f(x)=2-\frac{4}{0{,}5x-1}$; б) $f(x)=|x-3|-2$;
в) $f(x)=8x^2-x^4$; г) $f(x)=\left|\frac{1}{x}-1\right|$.

**285.** Дакажыце, што функцыя $f$ узрастае на $\boldsymbol{R}$, а функцыя $g$ убывае на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x)=3x+\cos 2x$; б) $g(x)=-\frac{x^3}{3}-x$;
в) $f(x)=x^7+2x^5+3$; г) $g(x)=-4x+\sin 3x$.

**286.** Дакажыце, што ўраўненне мае адзіны корань на кожным з дадзеных прамежкаў $P_1$ і $P_2$:

а) $x^3-27x+2=0$, $P_1=[-1;\ 1]$, $P_2=[4;\ 6]$;
б) $x^4-4x-9=0$, $P_1=[-2;\ 0]$, $P_2=[2;\ 3]$;
в) $x^4+6x^2-8=0$, $P_1=[-2;\ -1]$, $P_2=[1;\ 2]$;
г) $-1+3x^2-x^3=0$, $P_1=[-2;\ 0]$, $P_2=[2;\ 3]$.



## 23. Крытычныя пункты функцыі, максімумы і мінімумы

Мы разгледзелі паводзіны функцыі на прамежках, дзе $f'(x)>0$ і $f'(x)<0$. Унутраныя пункты вобласці вызначэння функцыі, у якіх яе вытворная роўна нулю або не існуе, называюцца *крытычнымі пунктамі* гэтай функцыі. Гэтыя пункты адыгрываюць важную ролю пры пабудаванні графіка функцыі, паколькі толькі яны могуць быць пунктамі экстрэмуму функцыі (рыс. 103 і 104). Сфармулюем адпаведнае сцверджанне, яго называюць *тэарэмай Ферма* (у гонар французскага матэматыка П'ера Ферма).

Неабходная ўмова экстрэмуму. ***Калі пункт $x_0$ з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі $f$ і ў гэтым пункце існуе вытворная $f'$, то яна роўна нулю: $f'(x_0)=0$.***

Разгледзім выпадак $f'(x_0)>0$. Па азначэнню вытворнай адносіна $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ пры $x\to x_0$ імкнецца да дадатнага ліку $f'(x_0)$, а значыць, і сама будзе дадатнай пры ўсіх $x$, дастаткова блізкіх да $x_0$. Для такіх $x$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

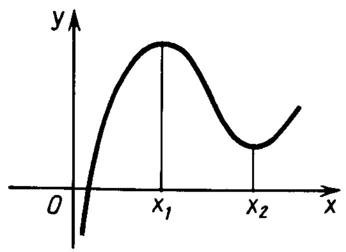
і, значыць, $f(x)>f(x_0)$ для ўсіх $x>x_0$ з некаторага наваколля пункта $x_0$. Таму $x_0$ не з'яўляецца пунктам максімуму.

Калі ж $x<x_0$, то $f(x)<f(x_0)$, і, значыць, $x_0$ не можа быць і пунктам мінімуму $f$.

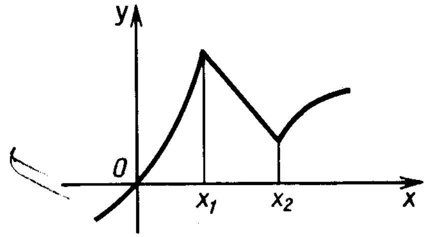
Выпадак $f'(x_0)<0$ разбіраецца аналагічна.

Важна адзначыць, што тэарэма Ферма ёсць толькі неабходная ўмова экстрэмуму: з таго, што вытворная ў пункце $x_0$ ператвараецца ў нуль, неабавязкова вынікае, што ў гэтым пункце функцыя мае экстрэмум. Напрыклад, вытворная функцыі $f(x)=x^3$ ператвараецца ў нуль у пункце 0, але экстрэмуму ў гэтым пункце функцыя не мае (рыс. 105).

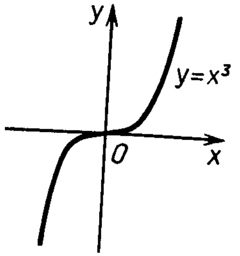
Да гэтага часу мы разглядалі крытычныя пункты, у якіх вытворная роўна нулю. Разгледзім цяпер крытычныя пункты, у якіх вытворная не існуе. (Адзначым, што, напрыклад, пункт 0 для функ-



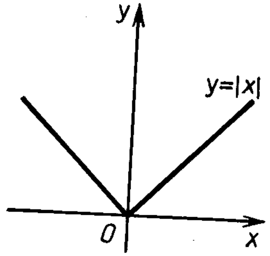

Рыс. 103



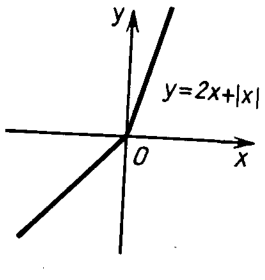

Рыс. 104




Рыс. 105




Рыс. 106




Рыс. 107

цыі $y=\sqrt{x}$ не з'яўляецца крытычным: у ім вытворная не існуе, але ён не ўнутраны пункт вобласці вызначэння.) У гэтых пунктах функцыя таксама можа мець або не мець экстрэмум.

○ Прыклад 1. Разгледзім функцыю $f(x)=|x|$ (рыс. 106). Гэта функцыя не мае вытворнай ў 0. Значыць, гэта крытычны пункт. Відавочна, што ў пункце 0 функцыя мае мінімум.

Прыклад 2. Разгледзім функцыю $f(x)=2x+|x|$ (рыс. 107). Па графіку відаць, што ў пункце 0 гэта функцыя не мае экстрэмуму. У гэтым пункце функцыя не мае і вытворнай.

На самай справе, калі дапусціць, што функцыя $f$ мае ў пункце 0 вытворную, то $f(x)-2x$ таксама мае вытворную ў 0. Але $f(x)-2x=|x|$, а функцыя $|x|$ у пункце 0 не дыферэнцыруемая (гл. п. 18), г. зн. мы прыйшлі да супярэчнасці.

Значыць, функцыя $f$ у пункце 0 вытворнай не мае. ●

З тэарэмы Ферма вынікае, што пры знаходжанні пунктаў экстрэмумаў функцыі трэба ў першую чаргу знайсці яе крытычныя пункты. Але, як відаць з разгледжаных прыкладаў, пытанне пра тое, ці сапраўды дадзены крытычны пункт ёсць пункт экстрэмуму, патрабуе дадатковага даследавання. Пры гэтым часта дапамагаюць такія дастатковыя ўмовы існавання экстрэмуму ў пункце.

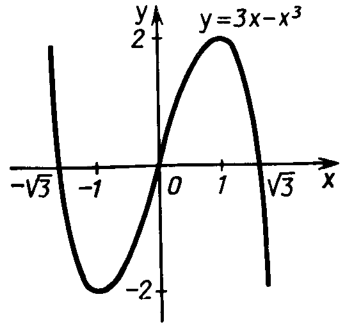
Прызнак максімуму функцыі. ***Калі функцыя $f$ непарарыўная ў пункце $x_0$, а $f'(x)>0$ на інтэрвале $(a; x_0)$ і $f'(x)<0$ на інтэрвале $(x_0; b)$, то пункт $x_0$ з'яўляецца пунктам максімуму функцыі $f$.***

Зручна карыстацца спрошчанай фармулёўкай гэтага прызнаку: *калі ў пункце $x_0$ вытворная мяняе знак з плюса на мінус, то $x_0$ ёсць пункт максімуму.*

Доказ. Вытворная $f'(x)>0$ на інтэрвале $(a; x_0)$, а функцыя $f$ неперарыўная ў пункце $x_0$, значыць (гл. п. 22), функцыя $f$ узрастае на прамежку $(a; x_0]$, і таму $f(x)<f(x_0)$ для ўсіх $x$ з інтэрвалу $(a; x_0)$.

На прамежку $[x_0; b)$ функцыя $f$ убывае (доказ аналагічны), і таму $f(x)<f(x_0)$ для ўсіх $x$ з інтэрвалу $(x_0; b)$.






Рыс. 108

Такім чынам, $f(x)<f(x_0)$ для ўсіх $x\neq x_0$ з інтэрвалу $(a; b)$, г. зн. $x_0$ ёсць пункт максімуму функцыі $f$.

▽ Прызнак максімуму мае просты механічны сэнс. Мы можам лічыць, што $f(x)$ — гэта каардыната пункта, які рухаецца па восі $Oy$ у момант часу $x$, а $f'(x)$ — скорасць пункта ў гэты момант. Па ўмове скорасць пункта за прамежак часу, што папярэднічае $x_0$, дадатная. Таму на працягу гэтага часу пункт рухаецца ў дадатным напрамку, ён падымаецца па восі $Oy$ да пункта $f(x_0)$, г. зн. $f(x)<f(x_0)$ пры $x<x_0$. У момант $x_0$ пункт на імгненне «спыняецца» (яго скорасць у гэты момант роўна нулю або не вызначана), а затым пачынае апускацца па восі (па ўмове скорасць $f'(x)$ меншая за нуль пры $x>x_0$), г. зн. $f(x)<f(x_0)$. Такім чынам, у наваколлі $x_0$ маем $f(x)<f(x_0)$. Пункт $x_0$ — пункт максімуму.▲

Прызнак мінімуму функцыі. ***Калі функцыя $f$ неперарыўная ў пункце $x_0$, а $f'(x)<0$ на інтэрвале $(a; x_0)$ і $f'(x)>0$ на інтэрвале $(x_0; b)$, то пункт $x_0$ з'яўляецца пунктам мінімуму функцыі $f$.***

Зручна карыстацца спрошчанай фармулёўкай гэтага прызнаку: *калі ў пункце $x_0$ вытворная мяняе знак з мінуса на плюс, то $x_0$ ёсць пункт мінімуму.*

Доказ гэтага прызнаку аналагічны доказу прызнаку максімуму (карысна правесці яго самастойна).

○ Прыклад 3. Знойдзем пункты экстрэмуму функцыі

$$f(x)=3x-x^3.$$

Вытворная гэтай функцыі, роўная $3-3x^2$, вызначана ва ўсіх пунктах і ператвараецца ў нуль у пунктах $-1$ і $1$. У пункце $-1$ вытворная мяняе знак з мінуса на плюс ($f'(x)<0$ пры $x<-1$ і $f'(x)>0$ пры $-1<x<1$). У пункце 1 вытворная мяняе знак з плюса на мінус. Карыстаючыся прызнакамі максімуму і мінімуму, атрымліваем, што пункт $-1$ з'яўляецца пунктам мінімуму, а пункт 1 — пунктам максімуму функцыі $f$. Графік функцыі паказаны на рысунку 108.●

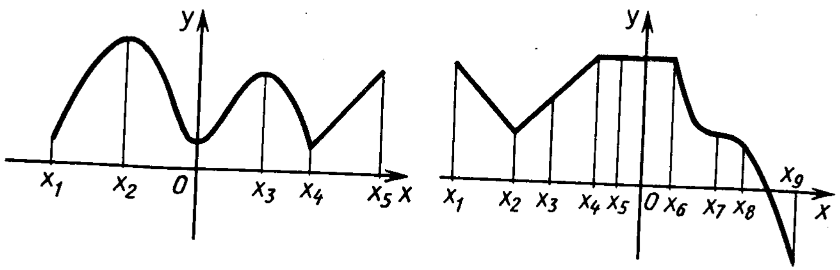
### *Практыкаванні*

**287.** Знайдзіце крытычныя пункты функцыі, графік якой паказаны на рысунку 109.

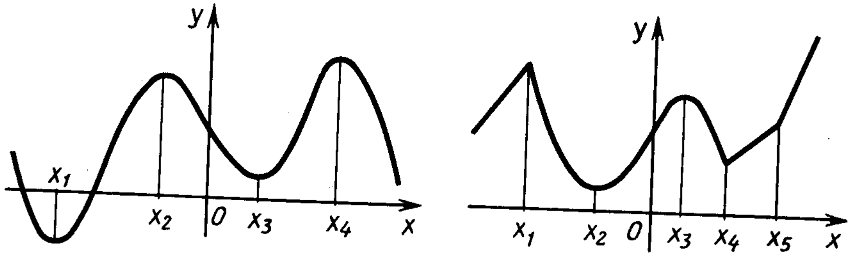
**288.** Знайдзіце крытычныя пункты функцыі:

а) $f(x)=4-2x+7x^2$;  б) $f(x)=1+\cos 2x$;

в) $f(x)=x-2\sin x$;  г) $f(x)=4x-\frac{x^3}{3}$.




Рыс. 109




Рыс. 110

**289.** Знайдзіце пункты максімуму і мінімуму функцыі $f$, графік якой паказаны на рысунку 110. Ці існуе вытворная ў адпаведным пункце? Калі існуе, то чаму роўна яе значэнне?

**290.** Знайдзіце крытычныя пункты функцыі. Вызначце, якія з іх з'яўляюцца пунктамі максімуму, а якія — пунктамі мінімуму:

а) $f(x)=5+12x-x^3$; б) $f(x)=9+8x^2-x^4$;
в) $f(x)=2x^3+3x^2-4$; г) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2$.

**291.** Дакажыце, што функцыя $f$ не мае крытычных пунктаў:

а) $f(x)=\sqrt{x}$; б) $f(x)=\operatorname{tg} x$;
в) $f(x)=3x-7$; г) $f(x)=3x^5+2x$.

---

Знайдзіце крытычныя пункты функцыі $f$ (292—293).

**292.** а) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$; б) $f(x)=2x+\frac{8}{x^2}$;
в) $f(x)=10\cos x+\sin 2x-6x$; г) $f(x)=x^3-4x+8$.

**293.** а) $f(x)=(x-2)^3$; б) $f(x)=\begin{cases}-x-2 \text{ пры } x\leqslant -1,\\ x \text{ пры } -1<x<1,\\ 2-x \text{ пры } x\geqslant 1;\end{cases}$

в) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$; г) $f(x)=\begin{cases}x+6 \text{ пры } x<-2,\\ x^2 \text{ пры } -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 6-x \text{ пры } x>2.\end{cases}$



**294.** Пабудуйце эскіз графіка функцыі, якая мае наступныя ўласцівасці:

а) $D(f)=[-3;\ 5]$; $f'(x)>0$ пры $x\in(-3;\ 1)$, $f'(x)<0$ пры $x\in(1;\ 5)$ і $f'(1)=0$;

б) $D(f)=[-3;\ 5]$; $f'(x)<0$ пры $x\in(-3;\ 1)$, $f'(x)>0$ пры $x\in(1;\ 5)$ і функцыя $f$ не мае вытворнай у пункце 1;

в) $D(f)=[a;\ b]$; $x_1$ — пункт мінімуму, $x_2$ — пункт максімуму функцыі, $f(a)>f(b)$;

г) $D(f)=[a;\ b]$; $x_1$ — пункт максімуму, $x_2$ — пункт мінімуму, $f(a)=f(b)$.

**295.** Даследуйце функцыю на ўзрастанне, убыванне і экстрэмумы. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-8x^2$; б) $f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$;
в) $f(x)=2x-\frac{1}{6}x^3$; г) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

## 24. Прыклады прымянення вытворнай да даследавання функцый

Вы ўжо ведаеце (п. 4), што пабудаванне графіка функцыі лепш пачынаць з яе даследавання, якое заключаецца ў тым, што для дадзенай функцыі: 1) знаходзяць яе вобласць вызначэння; 2) высвятляюць, ці з'яўляецца функцыя $f$ цотнай або няцотнай, перыядычнай. Далей знаходзяць: 3) пункты перасячэння графіка з восямі каардынат; 4) прамежкі знакапастаянства; 5) прамежкі ўзрастання і ўбывання; 6) пункты экстрэмуму і значэнні $f$ у гэтых пунктах і 7) даследуюць паводзіны функцыі ў наваколлі «асобых» пунктаў і пры вялікіх па модулю $x$.

На аснове такога даследавання будуецца графік функцыі.

Даследаванне функцыі на ўзрастанне (убыванне) і на экстрэмум зручна праводзіць з дапамогай вытворнай. Для гэтага спачатку знаходзяць вытворную функцыі $f$ і яе крытычныя пункты, а затым высвятляюць, якія з іх з'яўляюцца пунктамі экстрэмуму.

Прыклад 1. Даследуем функцыю $f(x)=3x^5-5x^3+2$ і пабудуем яе графік.

Правядзём даследаванне па дадзенай схеме.

1) $D(f)=\boldsymbol{R}$, паколькі $f$ — мнагачлен.

2) Функцыя $f$ не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай (дакажыце гэта самастойна).

3), 4) Графік $f$ перасякаецца з воссю ардынат у пункце $(0;\ f(0))$; каб знайсці пункты перасячэння графіка $f$ з воссю абсцыс, трэба рашыць ураўненне $3x^5-5x^3+2=0$, адзін з каранёў якога ($x=1$) лёгка знаходзіцца. Іншыя карані (калі яны ёсць) могуць быць знойдзены толькі прыблізна. Таму для дадзенай функцыі астатнія пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс

і прамежкі знакапастаянства мы знаходзіць не будзем (як ужо адзначалася ў п. 4, прыведзеная схема мае прыкладны характар).

5), 6) Знойдзем вытворную функцыі $f$:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

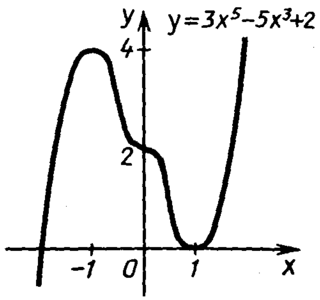
$D(f') = \mathbf{R}$, таму крытычных пунктаў, для якіх $f'(x)$ не існуе, няма.

Заўважым, што $f'(x) = 0$, калі $x^2(x^2 - 1) = 0$, г. зн. пры значэннях аргумента, роўных 0, $-1$ і 1. Разглядаемая функцыя мае тры крытычныя пункты.

Складаем табліцу:

| $x$ | $(-\infty; -1)$ | $-1$ | $(-1; 0)$ | 0 | $(0; 1)$ | 1 | $(1; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 4 | ↘ | 2 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | max | | | | min | |

У першым радку гэтай табліцы прыведзены ў парадку ўзрастання крытычныя пункты функцыі і абмежаваныя імі прамежкі. У другім радку адзначаны знакі вытворнай на гэтых прамежках. (На кожным такім інтэрвале знак вытворнай не мяняецца, яго можна знайсці, вызначыўшы знак вытворнай у якім-небудзь пункце разглядаемага інтэрвалу.) У трэцім радку запісаны вывады аб ходзе змянення дадзенай функцыі: « ↗ » — узрастае, « ↘ » — убывае, а ў чацвёртым — аб выглядзе крытычных пунктаў (п. 5 і 6 прыведзенай вышэй схемы). Крытычны пункт 0 функцыі $f$ не з'яўляецца пунктам экстрэмуму, таму ў чацвёртым радку табліцы ён не адзначаны. Заўважым, што вывад аб ходзе змянення функцыі на прамежку паміж крытычнымі пунктамі часта можна зрабіць, параўнаўшы значэнні функцыі на канцах гэтага прамежку (замест вызначэння знака вытворнай). Напрыклад, $f(0) < f(-1)$, таму на прамежку $(-1; 0)$ функцыя ўбывае (і, значыць, $f' < 0$ на гэтым прамежку).




Рыс. 111

Будуем графік функцыі (рыс. 111). Будаваць яго зручна па прамежках, якія дадзены ў табліцы. Напрыклад, у табліцы дадзена, што $f$ убывае на інтэрвале $(0; 1)$. Функцыя $f$ непарыўная ў пунктах 0 і 1 (паколькі яна непарыўная ўсюды), значыць, яна ўбывае на адрэзку $[0; 1]$. Таму рысуем графік убываючым на адрэзку $[0; 1]$ ад значэння $f(0) = 2$ да значэння $f(1) = 0$. Пры гэтым датычныя да графіка ў пунктах 0; $\pm 1$ павінны быць гарызантальнымі — у другім радку табліцы сказана, што ў гэтых пунктах вытворная роўна нулю. Аналагічна будуецца графік і на астатніх прамежках.



Прыклад 2. Знойдзем лік каранёў ураўнення $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$.

Разгледзім функцыю $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 11$. Яе вобласць вызначэння $D(f) = (-\infty; \infty)$. Для адшукання крытычных пунктаў функцыі $f$ знойдзем яе вытворную: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Гэта вытворная ператвараецца ў нуль у пунктах $x = -1$ і $x = 2$.

Запоўнім табліцу:

| $x$ | $(-\infty; -1)$ | $-1$ | $(-1; 2)$ | 2 | $(2; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $-4$ | ↘ | $-31$ | ↗ |
| | | max | | min | |

На прамежку $(-\infty; -1]$ функцыя ўзрастае ад $-\infty$ да $-4$, таму на гэтым прамежку ўраўненне $f(x) = 0$ каранёў не мае. На прамежку $[-1; 2]$ ураўненне таксама не мае каранёў, паколькі на гэтым прамежку $f$ убывае ад $-4$ да $-31$. Нарэшце, на прамежку $[2; \infty)$ функцыя $f$ узрастае ад $-31$ да бесканечнасці; на гэтым прамежку ўраўненне $f(x) = 0$ мае адзін корань (па тэарэме аб корані). Такім чынам, ураўненне $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ мае адзін корань і гэты корань належыць інтэрвалу $(2; \infty)$. ●

### *Практыкаванні*

Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік (296—297).

**296.** а) $f(x) = x^2 - 2x + 8$; б) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$; г) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

**297.** а) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

**298.** Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання функцыі:

а) $f(x) = 1 + 1{,}5x - 3x^2 - 2{,}5x^3$; б) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$;

в) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x - 5$; г) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$.

**299.** Дакажыце, што функцыя $f$ узрастае на мностве $\mathbf{R}$:

а) $f(x) = 2x - \cos x$; б) $f(x) = x^5 + 4x$;

в) $f(x)=\sin x+\frac{3x}{2}$; г) $f(x)=2x^3+x-5$.

Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік (300—302).

**300.** а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$; б) $f(x)=4x^2-x^4$;

в) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-1\frac{1}{3}x^3$; г) $f(x)=5x^3-3x^5$.

**301.** а) $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$; б) $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

в) $f(x)=x\sqrt{2-x}$; г) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

**302.** а) $f(x)=\sin^2 x+\sin x$; б) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\cos^2 x-\cos x$; г) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

**303.** Дакажыце, што функцыя $f$ прымае на дадзеным прамежку дадатныя значэнні:

а) $f(x)=\operatorname{tg} x-x$; $I=\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$; $I=[1;\ \infty)$;

в) $f(x)=x-\sin x$; $I=(0;\ \infty)$;

г) $f(x)=x+\frac{\pi}{2}-\cos x$; $I=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

**304.** Колькі каранёў мае ўраўненне:

а) $4x^3-3x^2-36x-10=0$; б) $\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x=0$;

в) $x^4-4x^3-9=0$; г) $x^2-\frac{x^3}{3}-1=0$?

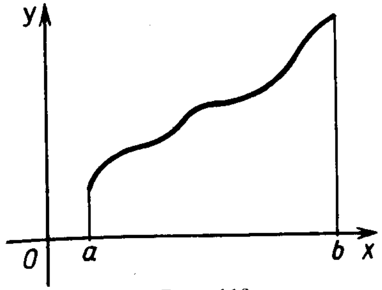
### 25. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі

Рашэнне многіх практычных задач часта зводзіцца да знаходжання найбольшага і найменшага значэнняў неперарыўнай на адрэзку функцыі. У курсах аналізу даказваецца т э а р э м а В е й е р ш т р а с а, якая сцвярджае, што *неперарыўная на адрэзку $[a;\ b]$ функцыя $f$ прымае на гэтым адрэзку найбольшае і найменшае значэнні*, г. зн. існуюць пункты адрэзка $[a;\ b]$, у якіх $f$ прымае найбольшае і найменшае на $[a;\ b]$ значэнні.

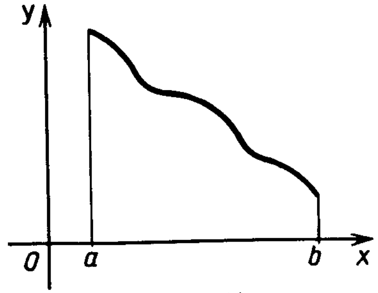
Для выпадку, калі функцыя $f$ не толькі неперарыўная на адрэзку $[a;\ b]$, але мае на гэтым адрэзку толькі канечны лік крытычных пунктаў, укажам *правіла адшукання найбольшага і найменшага значэнняў $f$*.

Дапусцім спачатку, што $f$ не мае на адрэзку $[a;\ b]$ крытычных пунктаў. Тады (п. 23) яна ўзрастае (рыс. 112) або ўбывае (рыс. 113) на гэтым адрэзку, і, значыць, найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f$ на адрэзку $[a;\ b]$ — гэта значэнні у канцах $a$ і $b$.






Рыс. 112




Рыс. 113

Няхай цяпер функцыя $f$ мае на адрэзку $[a;\ b]$ канечны лік крытычных пунктаў. Гэтыя пункты разбіваюць адрэзак $[a;\ b]$ на канечны лік адрэзкаў, унутры якіх крытычных пунктаў няма. Таму (гл. папярэдні абзац) найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f$ на такіх адрэзках прымаюцца ў іх канцах, г. зн. у крытычных пунктах функцыі або ў пунктах $a$ і $b$.

Такім чынам, каб знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі, якая мае на адрэзку канечны лік крытычных пунктаў, трэба вылічыць значэнні функцыі ва ўсіх крытычных пунктах і на канцах адрэзка, а затым з атрыманых лікаў выбраць найбольшы і найменшы.

○ П р ы к л а д 1. Знойдзем найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y(x)=x^3-1{,}5x^2-6x+1$ на адрэзку $[-2;\ 0]$.

Спачатку знойдзем крытычныя пункты. Паколькі вытворная $y'(x)=3x^2-3x-6$ вызначана для любога $x$, застаецца рашыць ураўненне $y'(x)=0$. Рашаючы яго, знаходзім $x=-1$ і $x=2$.

Цяпер трэба выбраць найбольшы і найменшы з лікаў $y(-2)=$ $=-1$, $y(-1)=4{,}5$ і $y(0)=1$ (крытычны пункт $x=2$ не належыць разглядаемаму адрэзку). Зразумела, што найменшае значэнне дасягаецца ў пункце $-2$ і роўна $-1$, а найбольшае — у пункце $-1$ і роўна 4,5. Коратка гэта запісваюць так:

$$\max_{[-2;\ 0]} y(x)=y(-1)=4{,}5;\quad \min_{[-2;\ 0]} y(x)=y(-2)=-1. \bullet$$

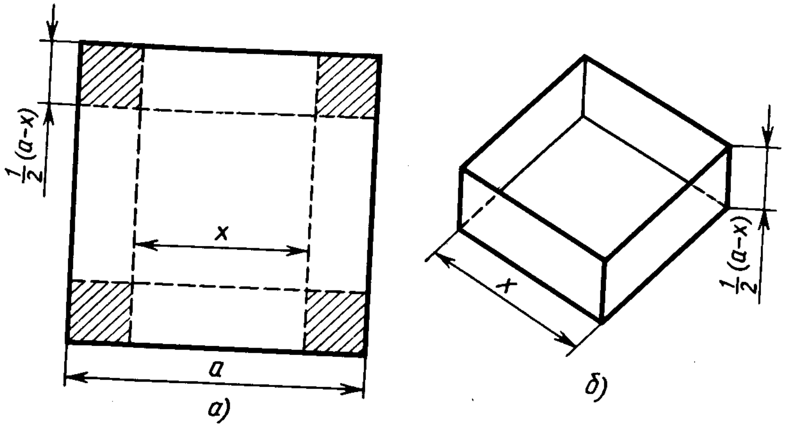
Выкладзены вышэй метад адшукання найбольшых і найменшых значэнняў функцыі можна скарыстаць для рашэння разнастайных прыкладных задач. Пры гэтым дзейнічаюць па наступнай схеме:

1) задача «перакладаецца» на мову функцый. Дзеля гэтага выбіраюць зручны параметр $x$, праз які велічыню, што цікавіць нас, выражаюць як функцыю $f(x)$;

2) сродкамі аналізу шукаюцца найбольшае або найменшае значэнні гэтай функцыі на некаторым прамежку;

3) высвятляецца, які практычны сэнс (у тэрмінах першапачатковай задачы) мае атрыманы (на мове функцый) вынік.

Наогул рашэнне практычных задач сродкамі матэматыкі, як правіла, мае тры асноўныя этапы: 1) фармалізацыю (пераклад




Рыс. 114

выходнай задачы на мову матэматыкі); 2) рашэнне атрыманай матэматычнай задачы і 3) інтэрпрэтацыю знойдзенага рашэння («пераклад» яго з мовы матэматыкі ў тэрмінах першапачатковай задачы).

З гэтым агульным метадам (яго называюць метадам матэматычнага мадэліравання) вы ўжо знаёмы, па апісанай схеме рашаліся тэкставыя задачы ў курсе алгебры. Прывядзём прыклад яго выкарыстання.

◌ Прыклад 2. З квадратнага ліста бляхі са стараной $a$ трэба вырабіць адкрытую зверху скрынку, выразаўшы па вуглах (рыс. 114) квадрацікі і загнуўшы пругі, што ўтварыліся. Якой павінна быць старана асновы скрынкі, каб яе аб'ём быў максімальным?

Рашэнне. 1) Абазначым праз $x$ даўжыню стараны асновы скрынкі. Тады даўжыні старон выразаных квадрацікаў роўны $\frac{1}{2}(a-x)$, а аб'ём скрынкі роўны $\frac{1}{2}(a-x)x^2$. Па сэнсу задачы лік $x$ задавальняе няроўнасці $0<x<a$, г. зн. належыць інтэрвалу $(0; a)$. Такім чынам, прыклад 2 мы звялі да такой задачы: знайсці найбольшае значэнне функцыі $V(x)=\frac{1}{2}(a-x)x^2$ на інтэрвале $(0; a)$.

2) Правіла адшукання найменшых і найбольшых значэнняў функцыі было сфармулявана для адрэзка. Функцыя $V$ неперарыўная на ўсёй лікавай прамой. Мы будзем шукаць яе найбольшае значэнне на адрэзку $[0; a]$, потым зробім вывад для рашаемай намі задачы. Знаходзім крытычныя пункты функцыі:

$$V'(x)=ax-\frac{3}{2}x^2;\ ax-\frac{3}{2}x^2=0,\ \text{г. зн. } x=0 \text{ або } x=\frac{2}{3}a.$$

$$V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{2}{27}a^3.$$



Паколькі $V(0)=0$ і $V(a)=0$, то сваё найбольшае на адрэзку $[0; a]$ значэнне функцыя $V$ дасягае пры $x=\frac{2}{3}a$, г. зн.

$$\max_{[0;\ a]} V(x)=V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3.$$

Найбольшае значэнне функцыі дасягаецца ўнутры адрэзка $[0; a]$, значыць, і ўнутры інтэрвалу $(0; a)$.

3) Застаецца ўспомніць, што $x$ — даўжыня стараны асновы скрынкі, якая пры зададзеных умовах мае максімальна магчымы аб'ём. Атрыманы вынік азначае, што максімальны аб'ём мае скрынка са стараной асновы $\frac{2}{3}a$.

### *Практыкаванні*

**305.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f$:

а) $f(x)=x^4-8x^2-9$ на прамежках $[-1; 1]$ і $[0; 3]$;

б) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$ на прамежках $[-4; -1]$ і $[1; 3]$;

в) $f(x)=3x^5-5x^3$ на прамежках $[0; 2]$ і $[2; 3]$;

г) $f(x)=\frac{x}{x+1}$ на прамежках $[-3; -2]$ і $[1; 5]$.

**306.** Параўнайце найбольшае значэнне функцыі на прамежку $P_1$ і найменшае яе значэнне на прамежку $P_2$:

а) $f(x)=x^3+3x^2-9x$; $P_1=[-4; 0]$, $P_2=[3; 4]$;

б) $f(x)=x^4-2x^2+4$; $P_1=\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $P_2=[2; 3]$.

**307.** Матэрыяльны пункт рухаецца па прамой згодна з законам $s(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3$, дзе $s(t)$ — шлях у метрах і $t$ — час у секундах. У які момант часу з прамежку $[4; 10]$ скорасць руху пункта будзе найбольшая і якая велічыня гэтай скорасці?

**308.** Знайдзіце значэнні аргумента з прамежку $[-2; 5]$, пры якіх скорасць змянення функцыі $f(x)=21x+2x^2-\frac{x^3}{3}$ будзе найбольшая або найменшая.

**309.** Скорасць матэрыяльнага пункта, які рухаецца прамалінейна, змяняецца па закону $v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t$ (скорасць вымяраецца ў метрах у секунду). У які момант часу паскарэнне руху будзе найменшае, калі рух разглядаць за прамежак ад $t_1=10$ с да $t_2=50$ с?

**310.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f$ на дадзеным прамежку:

а) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$, $[0;\ 2\pi]$;

б) $f(x)=1{,}5x^2+\frac{81}{x}$, $[1;\ 4]$;

в) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $f(x)=x+\frac{1}{x+2}$, $[-5;\ -2{,}5]$.

**311.** Лік 24 пакажыце ў выглядзе сумы двух неадмоўных складаемых так, каб сума квадратаў гэтых лікаў была найменшая.

**312.** Лік 4 пакажыце ў выглядзе сумы двух неадмоўных складаемых так, каб здабытак гэтых лікаў быў найбольшы.

**313.** Кавалак дроту даўжынёй 48 м згінаюць так, каб утварыўся прамавугольнік. Якую даўжыню павінны мець стораны прамавугольніка, каб яго плошча была найбольшая?

**314.** Лік 54 пакажыце ў выглядзе сумы трох дадатных складаемых, два з якіх прапарцыянальныя лікам 1 і 2, такім чынам, каб здабытак усіх складаемых быў найбольшы.

**315.** Лік 16 пакажыце ў выглядзе здабытку двух дадатных лікаў, сума квадратаў якіх будзе найменшая.

**316.** Плошча прамавугольніка 64 см$^2$. Якую даўжыню павінны мець яго стораны, каб перыметр быў найменшы?

**317.** Адкрыты бак, які мае форму прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай, павінен змяшчаць 13,5 л вадкасці. Пры якіх размерах бака на яго выраб спатрэбіцца найменшая колькасць металу?

**318.** У раўнабедраны трохвугольнік з асновай 60 см і бакавой стараной 50 см упісаны прамавугольнік найбольшай плошчы. Дзве вяршыні прамавугольніка ляжаць на аснове трохвугольніка, а дзве іншыя — на бакавых старанах. Знайдзіце даўжыні старон прамавугольніка.

**319.** З круглага бервяна выразаюць бэльку з прамавугольным сячэннем найбольшай плошчы. Знайдзіце размеры сячэння бэлькі, калі радыус сячэння бервяна роўны 20 см.

**320.** Буравая вышка размешчана ў полі на адлегласці 9 км ад найбліжэйшага пункта шасэ. З буравой трэба накіраваць кур'ера ў населены пункт, размешчаны па шасэ ў 15 км ад упамянутага пункта (лічым шасэ прамалінейным). Скорасць кур'ера на веласіпедзе па полі 8 км/г, а па шасэ 10 км/г. Да якога пункта шасэ яму трэба ехаць, каб у найкарацейшы час дасягнуць населенага пункта?

**321.** Лодка знаходзіцца на возеры на адлегласці 3 км ад бліжэйшага пункта $A$ берага. Пасажыр лодкі хоча дасягнуць сяла $B$, якое знаходзіцца на беразе на адлегласці 5 км ад $A$ (участак $AB$ берага лічым прамалінейным). Лодка рухаецца са скорасцю 4 км/г, а пасажыр, выйшаўшы з лодкі, можа за гадзіну прайсці 5 км. Да якога пункта берага павінна прыстаць лодка, каб пасажыр дасягнуў сяла ў найкарацейшы час?



**322.** Знайдзіце лік, які ў суме са сваім квадратам прымае найменшае значэнне.

**323.** Дакажыце, што з усіх прамавугольных трохвугольнікаў з зададзенай гіпатэнузай найбольшую плошчу мае раўнабедраны трохвугольнік.

**324.** З усіх прамавугольнікаў, упісаных у акружнасць, знайдзіце прамавугольнік найбольшай плошчы.

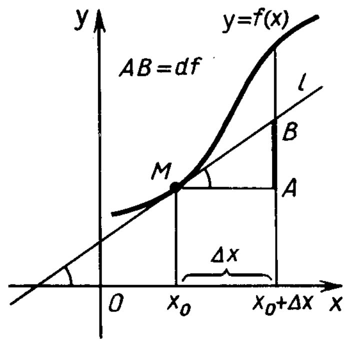
**325.** Пакажыце, што з усіх раўнабедраных трохвугольнікаў, упісаных у дадзены круг, найбольшую плошчу мае роўнастаронні трохвугольнік.

## ЗВЕСТКІ З ГІСТОРЫІ

**1. Аб паходжанні тэрмінаў і абазначэнняў.** Раздзел матэматыкі, у якім вывучаюцца вытворныя і іх прымяненні да даследавання функцый, называецца *дыферэнцыяльным злічэннем*. Прырашчэнні выгляду $\Delta f$, якія ўяўляюць сабой рознасці, адыгрываюць прыметную ролю пры рабоце з вытворнымі. Натуральна таму з'яўленне лацінскага кораня differentia (рознасць) у назве calculis diferentialis новага злічэння, якая перакладаецца як *злічэнне рознасцей*; гэта назва з'явілася ўжо ў канцы XVII ст., г. зн. пры нараджэнні новага метаду.

Тэрмін «вытворная» з'яўляецца літаральным перакладам на беларускую мову французскага слова derivée, якое ўвёў у 1797 г. Ж. Лагранж (1736—1813); ён жа ўвёў сучасныя абазначэнні $y'$, $f'$. Такая назва адлюстроўвае сэнс паняцця: функцыя $f'(x)$ паходзіць з $f(x)$, з'яўляецца вытворнай ад $f(x)$. І. Ньютан называў вытворную функцыю *флюксіяй*, а саму функцыю — *флюентай*. Г. Лейбніц гаварыў аб *дыферэнцыяльнай адносіне* і абазначаў вытворную як $\frac{df}{dx}$. Гэта абазначэнне таксама часта сустракаецца ў сучаснай літаратуры.

Сімвал $df$ Лейбніц выбраў для абазначэння *дыферэнцыяла* функцыі $f$. Дыферэнцыял $df$ функцыі $f$ — гэта здабытак вытворнай $f'(x_0)$ на прырашчэнне $\Delta x$, г. зн. $df=f'(x_0)\Delta x$; замяняючы абазначэнне $\Delta x$ на $dx$, гэта самае можна запісаць так: $df=f'(x_0)dx$, адкуль $f'(x_0)=\frac{df}{dx}$. Геаметрычны сэнс дыферэнцыяла зразумелы з разгляду рысунка 115: тут $df=AB$, прамая $l$ — датычная да графіка.




Рыс. 115



**Лейбніц Готфрыд Вільгельм**

**(1646—1716) —**

**вялікі нямецкі вучоны. Філосаф, матэматык, фізік, юрыст, моваэнаўца. Стваральнік (разам з Ньютанам) матэматычнага аналізу. Заснавальнік вялікай матэматычнай школы. Ідэі Лейбніца аказалі вялікі ўплыў на развіццё матэматычнай логікі.**

Расказ аб паходжанні тэрміналогіі, прынятай у дыферэнцыяльным злічэнні, быў бы няпоўны без паняццяў *граніцы* і *бесканечна малой.* Больш падрабязна аб граніцы гаворыцца ніжэй, а пакуль заўважым, што, напрыклад, вытворная ва ўсіх дапаможніках вызначаецца менавіта як граніца. Пішуць $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ замест прынятага вышэй абазначэння $\frac{\Delta f}{\Delta x}\to f'(x_0)$ пры $\Delta x\to 0$.

Абазначэнне lim — скарочаны запіс лацінскага слова limes (мяжа, граніца); памяншаючы, напрыклад, $\Delta x$, мы імкнём значэнні $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ да «граніцы» $f'(x_0)$. Тэрмін «граніца» ўвёў Ньютан.

Прыкладам бесканечна малой можа служыць функцыя $(\Delta x)^2$ ад $\Delta x$, паколькі $(\Delta x)^2\to 0$ пры $\Delta x\to 0$. Наогул, калі $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, гавораць, што $\alpha(x)$ — бесканечна малая. Бесканечна малыя адыгрываюць важную ролю ў матэматычным аналізе, які таму часта называюць таксама аналізам бесканечна малых.

Зазначым нарэшце, што слова «экстрэмум» паходзіць ад лацінскага extremum (крайні). Maximum перакладаецца як «найбольшы», а minimum — «найменшы».

**2. З гісторыі дыферэнцыяльнага злічэння.**

1) Дыферэнцыяльнае злічэнне створана Ньютанам і Лейбніцам параўнальна нядаўна, у канцы XVII ст. Тым больш дзіўна, што задоўга да гэтага Архімед не толькі рашыў задачу на пабудаванне датычнай да такой складанай крывой, як спіраль (прымяняючы пры гэтым гранічныя пераходы), але і змог знайсці максімум функцыі $f(x)=x^2(a-x)$.

Эпізадычна паняцце датычнай (якое, як вы ведаеце, звязана з



**Ферма П'ер**

**(1601—1665) —**

**французскі матэматык і юрыст. Адзін з найбуйнейшых матэматыкаў свайго часу. Ферма належаць выдатныя працы ў галіне тэорыі лікаў. Стваральнік аналітычнай геаметрыі, у якой ён атрымаў рад буйных вынікаў.**



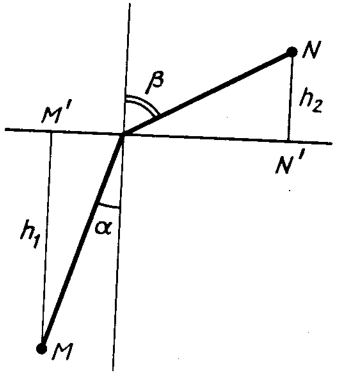
паняццем вытворнай) сустракалася ў працах італьянскага матэматыка Н. Тарталлі (каля 1499—1557) — тут датычная з'явілася ў ходзе вывучэння пытання аб вугле нахілу гарматы, пры якім забяспечваецца найбольшая далёкасць палёту снарада. І. Кеплер разглядаў датычную пры рашэнні задачы аб найбольшым аб'ёме паралелепіпеда, упісанага ў шар дадзенага радыуса.

У XVII ст. на аснове вучэння Г. Галілея аб руху актыўна развілася кінематычная канцэпцыя вытворнай. Розныя варыянты выкладання, прымененыя да розных задач, сустракаюцца ўжо ў Р. Дэкарта, французскага матэматыка Роберваля (1602—1675), англійскага вучонага Д. Грэгары (1638—1675), у працах І. Бароу (1630—1677) і, нарэшце, І. Ньютана.

Да разгляду датычнай і *нармалі* (так называецца прамая, перпендыкулярная датычнай і праведзеная ў пункце дотыку) Дэкарт прыйшоў у ходзе вывучэння аптычных уласцівасцей лінзаў. З дапамогай метадаў аналітычнай геаметрыі і вынайдзенага ім *метаду неазначальных каэфіцыентаў* ён змог рашыць задачы аб пабудаванні нармалей да рада крывых, у тым ліку эліпса.

У 1629 г. П. Ферма прапанаваў правілы знаходжання экстрэмумаў мнагачленаў. Важна адзначыць, што фактычна пры вывадзе гэтых правіл Ферма актыўна прымяняў гранічныя пераходы, карыстаючыся прасцейшай дыферэнцыяльнай умовай максімуму і мінімуму.

Ферма адыграў выдатную ролю ў развіцці матэматыкі. Яго імя заслужана носіць не толькі вядомая вам тэарэма з аналізу. Вялікая тэарэма Ферма («Ураўненне $x^n+y^n=z^n$ не мае рашэнняў у натуральных ліках пры натуральным $n$, большым за два»), не даказаная, праўда, яшчэ і цяпер, з'яўляецца толькі адным з вынікаў яго разважанняў над праблемамі тэорыі лікаў. Ферма




Рыс. 116

адзін са стваральнікаў аналітычнай геаметрыі. Ён займаўся і оптыкай. Шырока вядомы прынцып Ферма («Прамень святла распаўсюджваецца так, што час яго праходжання будзе найменшы»), які прымяняецца і ў сучаснай фізіцы.

Важныя вывады гэтага прынцыпу вы можаце вывесці самастойна. Закон адбіцця святла («Вугал адбіцця роўны вуглу падзення») зводзіцца згодна з прынцыпам Ферма да рашэння вядомай геаметрычнай задачы. Для вываду *закону праламлення святла* вам трэба прымяніць вядомыя правілы адшукання экстрэмуму. (Трэба рашыць такую задачу (рыс. 116): «Прамень святла праходзіць з пункта $M$ ніжняй паўплоскасці ў пункт $N$ верхняй. Скорасць святла ў ніжняй паўплоскасці (аднародным асяроддзі) пастаянная і роўна $v_1$, а ў верхняй паўплоскасці — $v_2$. Па якому шляху павінен рухацца пункт, каб увесь яго шлях заняў найменшы час?»)

Сістэматычнае вучэнне аб вытворных было развіта Лейбніцам і Ньютанам, які сфармуляваў і дзве асноўныя праблемы аналізу:

«1. Даўжыня пройдзенага шляху пастаянна (г. зн. у любы момант часу) дадзеная; трэба знайсці скорасць руху ў прапанаваны час.

2. Скорасць руху пастаянна дадзеная; трэба знайсці даўжыню пройдзенага ў прапанаваны час шляху».

Першая праблема задае праграму развіцця дыферэнцыяльнага злічэння, з элементамі якога вы ўжо пазнаёміліся ў гэтым раздзеле. Другая адносіцца да інтэгральнага злічэння (гл. раздзел III).

Калі Ньютан зыходзіў у асноўным з задач механікі (ньютанаў аналіз стварыўся адначасова з ньютанавай класічнай механікай), то Лейбніц зыходзіў пераважна з геаметрычных задач.

Гаворачы аб далейшым развіцці ідэй аналізу (а яны вельмі хутка заваявалі папулярнасць і знайшлі многіх паслядоўнікаў), неабходна ў першую чаргу назваць імёны вучняў Лейбніца — братоў Я. і І. Бернулі.

А. Лапіталь (1661—1704), які вучыўся ў І. Бернулі, выдаў ужо ў 1696 г. першы друкаваны курс дыферэнцыяльнага злічэння «Аналіз бесканечна малых для даследавання крывых ліній», які садзейнічаў распаўсюджванню новых метадаў.

Рад значных вынікаў атрымаў Лагранж, яго працы адыгралі важную ролю ў асэнсаванні асноў аналізу.

Як і ў выпадку многіх іншых раздзелаў матэматыкі, неацэнны ўклад у развіццё матэматычнага аналізу, які ўнеслі Л. Эйлер і К. Ф. Гаус (1777—1855).



У кароткім нарысе немагчыма расказаць аб сутнасці адкрыццяў, зробленых у XVIII ст. і пазней. Але аб адным напрамку нельга не сказаць. Гутарка ідзе аб раскладанні функцый у ступенныя рады, г. зн. аб запісе функцый у выглядзе мнагачленаў з бесканечным лікам складаемых. З прыкладам бесканечнай сумы (лікавага рада) вы знаёмы: бесканечныя перыядычныя дробы вы запісвалі ў выглядзе сумы бесканечнага ліку складаемых. З лікавымі і функцыянальнымі радамі працаваў не толькі Ньютан, але і яго папярэднікі, і таму некалькі несправядлівай здаецца назва *формула Тэйлара* (Б. Тэйлар (1685—1731) — англійскі матэматык, які апублікаваў яе ў 1715 г.), прынятая для наступнай вартай увагі суадносіны:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}x_0}{n!}(\Delta x)^n+\ldots$$

(тут $f^{(n)}(x_0)$ — значэнне, атрыманае $n$-кратным дыферэнцыраваннем функцыі $f$ у пункце $x_0$, а $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$). Ведаючы формулы вытворных, напрыклад, для функцый $\sin x$ і $\cos x$, вы можаце раскласці іх у рад Тэйлара самастойна.

Выявілася, што ў радзе выпадкаў, адкідаючы бесканечны лік складаемых, можна атрымліваць формулы, якія даюць добрыя прыбліжэнні функцый мнагачленамі.

2) Энтузіязм, выкліканы з'яўленнем новага магутнага метаду, які дазваляе рашаць шырокае кола задач, садзейнічаў бурнаму развіццю аналізу ў XVIII ст. Але к канцу гэтага стагоддзя праблемы, якія ўзніклі ўжо ў стваральнікаў дыферэнцыяльнага і інтэгральнага злічэнняў, праявіліся вельмі востра.

Асноўная цяжкасць заключалася ў тым, што дакладныя азначэнні такіх ключавых паняццяў, як *граніца, неперарыўнасць, сапраўдны лік,* адсутнічалі (адпаведна і ў разважаннях былі лагічныя прабелы, а часам нават і памылкі). Характэрным з'яўляецца прыклад — азначэнне неперарыўнасці. Эйлер, Лагранж і нават Фур'е (а ён працаваў ужо ў пачатку XIX ст.) называлі неперарыўнай функцыю, якая ў сваёй вобласці вызначэння зададзена адным аналітычным выразам.

Тым самым «новая» матэматыка не адпавядала стандартам строгасці, прывычным для вучоных, якія былі выхаваны на класічных узорах грэчаскіх матэматыкаў. Інтуіцыя, такая неабходная для матэматыкаў, істотна вызначыла логіку, якая таксама з'яўляецца неад'емнай характарыстыкай матэматычнай навукі. Геніяльная інтуіцыя такіх гігантаў, як Ньютан, Лейбніц, Эйлер, дапамагала ім пазбягаць памылак. Але неабходны былі трывалыя лагічныя асновы.

Характэрнымі з'яўляюцца два выказванні, якія адносяцца да XVIII ст. Вядомы матэматык М. Роль пісаў, што новае злічэнне ёсць калекцыя геніяльных памылак. А вялікі французскі мысліцель Вальтэр заўважыў, што гэта злічэнне ўяўляе сабой майстэрства



**Кашы Агюстэн Луі**

**(1789—1857) —**

**буйны французскі матэматык. Даказаў рад выдатных тэарэм у галіне аналізу, тэорыі функцый комплекснага пераменнага, тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў і г. д. Вялікая заслуга Кашы — распрацоўка курса аналізу, у якім, у прыватнасці, ён прапанаваў азначэнні граніцы, непарыўнасці функцыі і да т. п., якія сталі класічнымі.**

вылічваць і дакладна вымяраць рэчы, існаванне якіх не можа быць даказана.

Рашаючы крок да стварэння моцнага фундамента аналізу быў зроблены ў 20-я гады мінулага стагоддзя французскім матэматыкам А. Кашы (1789—1857), які даў дакладныя азначэнні граніцы функцыі і паслядоўнасці і на іх аснове даказаў многія фундаментальныя тэарэмы аналізу. Некалькі раней (1821 г.) азначэнні граніцы і непарыўнасці, цэлы рад іншых важных вынікаў (у тым ліку вядомы прыклад функцыі, якая непарыўная на прамежку, але не мае вытворнай ні ў адным яго пункце) атрымаў чэшскі матэматык Б. Бальцана (1781—1848), але яго працы сталі вядомыя значна пазней.

Азначэнне граніцы функцыі па Кашы фармулюецца так: «Лік $A$ называецца граніцай функцыі $f(x)$ пры $x$, які імкнецца да $a$ (г. зн. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$), калі для любога ліку $\varepsilon>0$ можна падабраць такі лік $\delta>0$, што $|f(x)-A|<\varepsilon$ для ўсіх $x$, якія задавальняюць няроўнасці $0<|x-a|<\delta$».

Абапіраючыся на гэта азначэнне, ужо няцяжка даць азначэнне непарыўнасці ў пункце: функцыя $f$ непарыўная ў пункце $x_0$, калі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Фармулёўка азначэння граніцы паслядоўнасці (а іменна з гэтым паняццем звязана азначэнне інтэграла — гл. п. 30) такая: «Лік $a$ з'яўляецца *граніцай паслядоўнасці* $a_n$, калі для любога $\varepsilon>0$ існуе нумар $N$, такі, што пры ўсіх $n>N$ правільная няроўнасць $|a_n-A|<\varepsilon$».

Кашы даказаў наступныя тэарэмы аб граніцах, якімі мы фактычна карысталіся (называючы іх правіламі гранічных пераходаў — п. 14) пры вылічэнні вытворных:



*Калі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то існуюць граніцы сумы і рознасці, здабытку, дзелі (пры $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$), прычым*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

Прывядзём прыклад доказу «па Кашы» (часта гавораць: «на мове эпсілан-дэльта»). Дакажам тэарэму аб граніцы сумы.

Возьмем любы дадатны лік $\varepsilon>0$. Тады лік $\frac{\varepsilon}{2}>0$, і таму (па азначэнню Кашы):

1) з умовы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ вынікае, што можна падабраць лік $\delta_1$, такі, што

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

для ўсіх $x$, якія задавальняюць няроўнасці $0<|x-a|<\delta_1$;

2) з умовы $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ вынікае: існуе такі $\delta_2>0$, што

$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

для ўсіх $x$, якія задавальняюць няроўнасці $0<|x-a|<\delta_2$.

Абазначым праз $\delta$ найменшы з лікаў $\delta_1$ і $\delta_2$. Тады для любога $x$, які задавальняе няроўнасці $0<|x-a|<\delta$, выкананы няроўнасці (1) і (2); для гэтых $x$ маем:

$$|f(x)+g(x)-(A+B)|=|(f(x)-A)+(g(x)-B)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

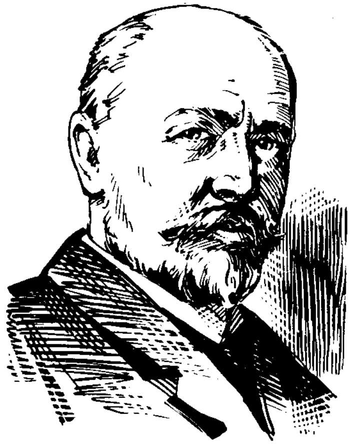
Гэтым даказана, што $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$.

Астатнія правілы (для здабытку і дзелі) даказваюцца аналагічна.

Яркія характарыстыкі глыбіні перавароту ў матэматыцы, які адбыўся ў XVII ст., далі Карл Маркс і Фрыдрых Энгельс. Пачатковы перыяд развіцця новых галін матэматыкі, звязаных з паняццямі функцыі, бесканечна малых велічынь, граніц і вытворных, быў ахарактарызаваны Марксам як «містычны».

Лозунгам многіх матэматыкаў XVII ст. быў: «Рухайцеся ўперад, і вера ў правільнасць вынікаў да вас прыйдзе».

**3. Аб паняцці сапраўднага ліку.** Матэматычны аналіз узнік у XVIII ст. Але поўнае яго абгрунтаванне было дадзена толькі ў канцы XIX ст., калі следам за тэорыяй граніц, створанай Кашы,



**Кантар Георг**

**(1845—1918) —**

**нямецкі матэматык, ідэі і работа якога аказалі вялікі ўплыў на развіццё матэматыкі ў цэлым, на разуменне яе асноў. Стваральнік тэорыі мностваў. Атрымаў рад выдатных вынікаў, якія адносяцца да тэорыі бесканечных мностваў, тэорыі сапраўднага ліку.**

адразу ў некалькіх формах нямецкімі матэматыкамі Р. Дэдэкіндам (1831—1916), К. Вейерштрасам (1815—1897) і Г. Кантарам (1845—1918) была пабудавана тэорыя сапраўднага ліку.

Першыя ўяўленні аб ліках складваліся паступова пад уплывам практыкі. З даўніх часоў лікі скарыстоўваліся пры лічэнні і вымярэнні велічынь.

Адказ на пытанне: «Колькі элементаў змяшчае дадзенае канечнае мноства?» — заўсёды выражаецца або натуральным лікам, або лікам нуль. Значыць, мноства

$$\{0;\ 1;\ 2;\ ...\}$$

усіх неадмоўных лікаў абслугоўвае ўсе патрэбнасці лічэння.

Інакш выглядае справа з вымярэннем велічынь. Адлегласць паміж двума пунктамі можа раўняцца 3,5 кіламетра, плошча пакоя — 16,45 квадратнага метра і г. д.

Велічыні бываюць розных родаў. Прывядзём два прыклады.

1. Адлегласці паміж пунктамі, даўжыні адрэзкаў, ломаных і крывых ліній — гэта велічыні аднаго і таго ж роду. Іх выражаюць у сантыметрах, метрах, кіламетрах і г. д.

2. Працягласці прамежкаў часу таксама велічыні аднаго і таго ж роду. Іх выражаюць у секундах, мінутах, гадзінах і г. д.

Велічыні аднаго і таго ж роду можна *параўноўваць* паміж сабой і *складваць*:

| | |
|---|---|
| 1 м > 90 см | 350 м + 650 м = 1 км |
| 300 с < 1 г | 2 г + 3 г = 5 г |
| 1 кг > 720 г | 500 г + 500 г = 1 кг |

Але бессэнсоўна пытаць, што больш: 1 метр ці 1 гадзіна, і нельга скласці 1 метр з 30 секундамі. Працягласць прамежкаў



**Вейерштрас Карл Тэадор Вільгельм**

**(1815—1897) —**

**нямецкі матэматык, які даказаў класічныя тэарэмы ў розных галінах матэматыкі. Работы Вейерштраса па абгрунтаванню матэматычнага аналізу, па сутнасці, заканчваюць стварэнне строгай стройнай тэорыі.**



часу і адлегласць — велічыні рознага роду. Складаць і параўноўваць велічыні рознага роду нельга.

Велічыні можна множыць на дадатныя лікі і нуль. У выніку множання велічыні $a$ на неадмоўны лік $x$ атрымліваецца велічыня $b = xa$ таго ж роду. Прывядзём некалькі прыкладаў:

$$5 \cdot 20 \text{ см} = 100 \text{ см} = 1 \text{ м};$$
$$0{,}01 \cdot 20 \text{ см} = 0{,}2 \text{ см} = 2 \text{ мм};$$
$$0 \cdot 20 \text{ см} = 0 \text{ см}.$$

Прыняўшы якую-небудзь велічыню $e$ за адзінку вымярэння, можна з яе дапамогай вымераць любую іншую велічыню $a$ таго ж роду. У выніку вымярэння атрымаем, што $a = xe$, дзе $x$ — лік.

Гэты лік $x$ называецца лікавым значэннем велічыні $a$ пры адзінцы вымярэння $e$. Лікавае значэнне велічыні залежыць ад выбару адзінкі вымярэння. Калі, напрыклад, даўжыня пакоя мае лікавае значэнне 5,6 пры адзінцы вымярэння ў 1 м ($e = 1$ м), то гэта ж даўжыня мае лікавае значэнне 560 пры адзінцы вымярэння ў 1 см ($e = 1$ см).

Няхай лікавыя значэнні велічынь $a$ і $b$ пры адной і той жа адзінцы вымярэння $e$ роўны $x$ і $y$, г. зн. $a = xe$, $b = ye$. Калі $b \neq 0$, то адносіну $\frac{x}{y}$ называюць *адносінай велічыні* $a$ да $b$.

Такія вось найпрасцейшыя звесткі аб велічынях. Прыведзенае апісанне паняцця велічыні абапіралася на паняцце ліку. Але гістарычны шлях быў іншым: дадатныя сапраўдныя лікі з'явіліся як адносіны велічынь (а дакладней, як адносіны даўжынь адрэзкаў).

З адкрыццём несувымернасці дыяганалі адзінкавага квадрата з яго стараной стала зразумела, што адносіна даўжынь адрэзкаў не заўсёды можа быць выражана не толькі натуральным, але

і рацыянальным лікам. Для таго каб лікавае значэнне кожнага адрэзка пры фіксаванай адзінцы вымярэння было вызначана, патрабавалася ўвядзенне новых лікаў — ірацыянальных.

Усе практычныя вымярэнні велічынь маюць толькі прыбліжаны характар. Іх рэзультат з патрабуемай дакладнасцю можна выразіць пры дапамозе рацыянальных дробаў або больш спецыяльным чынам — пры дапамозе канечных дзесятковых дробаў. Напрыклад, вымяраючы дыяганаль квадрата са стараной у 1 м з дакладнасцю да 1 см, мы заўважым, што яе даўжыня прыблізна роўна 1,41 м. Пры вымярэнні з дакладнасцю да 1 мм атрымаем, што гэта даўжыня прыбліжана роўна 1,414 м.

Але ў матэматыцы часта не бяруць пад увагу прыбліжаны характар практычных вымярэнняў. Паслядоўны тэарэтычны падыход да вымярэння даўжынь адрэзкаў прыводзіць да неабходнасці разгляду бесканечных дзесятковых дробаў. (Менавіта такімі дробамі з'яўляюцца лікі $\frac{2}{3}=0{,}666...$; $\sqrt{2}=1{,}41421356...$; $\pi=3{,}14159265...$.)

Адносіна даўжыні любога адрэзка да даўжыні адрэзка, які прыняты за адзінку вымярэння, заўсёды можа быць выражана лікам, што запісваецца ў выглядзе бесканечнага дзесятковага дробу.

Поўная тэорыя сапраўдных лікаў даволі складаная і не ўваходзіць у праграму сярэдняй школы. Аднак з адным са спосабаў яе пабудавання мы пазнаёмімся ў агульных рысах.

1. Прымаюць:

а) кожнаму сапраўднаму ліку адпавядае (у якасці яго запісу) бесканечны дзесятковы дроб:

$$x=a_0{,}a_1a_2a_3\ \dots\ a_n\ \dots;$$

б) кожны бесканечны дзесятковы дроб з'яўляецца запісам сапраўднага ліку.

Але пры гэтым натуральна лічыць дзесятковы дроб, які заканчваецца бесканечнай паслядоўнасцю дзевятак, толькі другім запісам ліку, што выражаецца дзесятковым дробам, які заканчваецца бесканечнай паслядоўнасцю нулёў:

$$0{,}9999...=1{,}0000...;\quad 12{,}765999...=12{,}766000....$$

Такое ўзгадненне растлумачым прыкладам:

$$0{,}(9)=3\cdot 0{,}(3)=3\cdot\frac{1}{3}=1.$$

Толькі выключыўшы з разгляду дзесятковыя дробы з дзевяткай у перыядзе, атрымліваем узаемна адназначную адпаведнасць паміж мноствам сапраўдных лікаў і мноствам бесканечных дзесятковых дробаў.

Лік $a_0$ — гэта *цэлая частка* дадатнага ліку $x$, а

$$x-a_0=0{,}a_1a_2a_3\ \dots\ a_n\ \dots —$$

*дробавая частка* ліку $x$.



Лік $x_n=a_0{,}a_1a_2\ \dots\ a_n$ называюць *дзесятковым прыбліжэннем* $x$ *з дакладнасцю да* $10^{-n}$ *па недахопу*, а лік $x'_n=x_n+10^{-n}$ называюць *дзесятковым прыбліжэннем з дакладнасцю да* $10^{-n}$ *па лішку* для ліку $x=a_0{,}a_1a_2a_3\ \dots\ a_n\ \dots$.

Калі лік $x$ адмоўны, г. зн.

$$x=-a_0{,}a_1a_2a_3\ \dots\ a_n\ \dots,$$

то мяркуюць

$$x'_n=-a_0{,}a_1a_2a_3\ \dots\ a_n \text{ і}$$

$$x_n=x'_n-10^{-n}.$$

2. Уводзяць *правіла параўнання* двух сапраўдных лікаў. Па азначэнню лік $x$ меншы за лік $y$, калі хаця б пры адным $n$ выканана няроўнасць $x_n<y_n$, дзе $x_n$ і $y_n$ — дзесятковыя прыбліжэнні з дакладнасцю да $10^{-n}$ па недахопу для лікаў $x$ і $y$. (Мы выкарысталі тое, што правіла параўнання канечных дзесятковых дробаў ужо вядома.)

3. Вызначаюць *арыфметычныя дзеянні* над сапраўднымі лікамі (пры гэтым таксама карыстаюцца тым, што гэтыя дзеянні ўжо вызначаны для канечных дзесятковых дробаў).

*Сумай* двух дзесятковых лікаў $x$ і $y$ (абазначаецца $x+y$) называюць такі сапраўдны лік $z$, што пры любым $n$ выкананы няроўнасці

$$x_n+y_n\leqslant x+y<x'_n+y'_n.$$

У курсах матэматычнага аналізу даказваецца, што такі лік існуе і вызначаецца адзіным спосабам.

Аналагічна *здабыткам* двух неадмоўных лікаў $x$ і $y$ называюць такі лік $z$ (абазначаецца $xy$), што пры любым $n$ выкананы няроўнасці

$$x_ny_n\leqslant xy<x'_ny'_n.$$

Такі лік існуе і вызначаецца адназначна. Для сапраўдных лікаў розных знакаў, выкарыстаўшы тое, што здабытак неадмоўных лікаў $|x|$ і $|y|$ ужо вызначаны, мяркуюць $xy=-|x|\,|y|$; у астатніх выпадках $xy=|x|\,|y|$. (Як звычайна, модулем кожнага з лікаў

$$a_0,\ a_1a_2\ \dots\ a_n\ \dots \text{ і } -a_0,\ a_1a_2\ \dots\ a_n\ \dots$$

называюць лік $a_0,\ a_1a_2\ \dots\ a_n\ \dots$.)

Адыманне вызначаецца як дзеянне, адваротнае складанню: *рознасцю* $x-y$ лікаў $x$ і $y$ называецца такі лік $z$, што $y+z=x$, а дзяленне — як дзеянне, адваротнае множанню: *дзеллю* $x:y$ называецца такі лік $z$, што $yz=x$.

4. Паказваюць, што няроўнасці і арыфметычныя аперацыі, вызначаныя ўказаным у п. 3 чынам, захоўваюць асноўныя ўласцівасці, характэрныя ім у мностве рацыянальных лікаў.

## *Пытанні і задачы на паўтарэнне*

**1.** 1) Што такое прырашчэнне аргумента і прырашчэнне функцыі?
2) У чым заключаецца геаметрычны сэнс прырашчэнняў $\Delta x$ і $\Delta f$? адносіны $\frac{\Delta f}{\Delta x}$?
3) Выразіце $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ праз $x_0$ і $\Delta x$:

а) $f(x)=x^2-x$; б) $f(x)=x^3+2$;
в) $f(x)=3x-1$; г) $f(x)=\frac{2}{x}$.

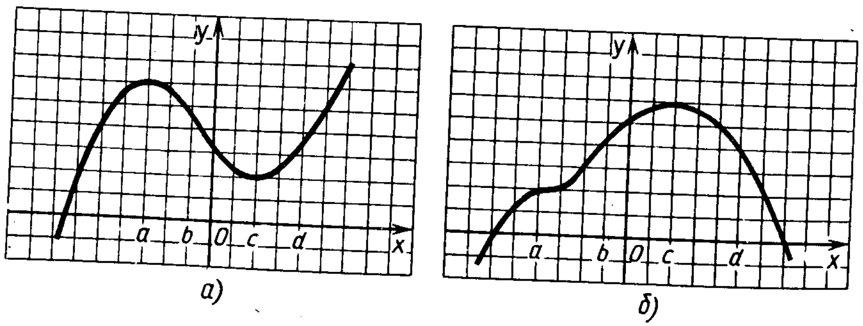
**2.** 1) Сфармулюйце азначэнне вытворнай функцыі ў пункце.
2) Карыстаючыся азначэннем, знайдзіце вытворную функцыі $f$ у пункце $x_0$:

а) $f(x)=x^2+1,\ x_0=-2$; б) $f(x)=\frac{2}{x},\ x_0=3$;
в) $f(x)=2x-1,\ x_0=-4$; г) $f(x)=x^3,\ x_0=2$.

**3.** 1) Сфармулюйце правіла вылічэння вытворных. Чаму роўна вытворная функцыі $f(x)=x^n$ ($n$ — цэлы лік)?
2) Дыферэнцыруемая функцыя $f$ зададзена графікам (рыс. 117). Пабудуйце датычныя да графіка $f$ ва ўказаных пунктах і знайдзіце прыбліжаныя значэнні вытворнай у пунктах $a$, $b$, $c$, $d$.
3) Прадыферэнцыруйце функцыю:

а) $f(x)=(x+2)\sin x$; б) $f(x)=\frac{4}{(9+7x)^5}$;
в) $f(x)=x^3-\frac{2}{x}+\cos 3x$; г) $f(x)=\frac{x^2}{x+3}$.

**4.** 1) Якую функцыю называюць непарарыўнай на прамежку?
2) Знайдзіце прамежкі непарарыўнасці функцыі:




Рыс. 117



а) $f(x)=\frac{x^3-2x^2-5}{4-x^2}$; б) $f(x)=1-2\operatorname{tg} x$;
в) $f(x)=\frac{x-4}{x^2-3x-10}$; г) $f(x)=x^4-3x^2+7$.

3) Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $\frac{4}{x+4}+\frac{1}{x+1}>1$; б) $x^4-15x^2-16\leqslant 0$;
в) $\frac{x^2-3x-4}{x-4}\leqslant 0$; г) $(x-1)(x-2)(x+4)\geqslant 0$.

**5.** 1) Якую прамую называюць датычнай да графіка функцыі $f$ у пункце $(x_0;\ f(x_0))$?
2) У чым заключаецца геаметрычны сэнс вытворнай?
3) Напішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f$ у пункце $(x_0;\ f(x_0))$:

а) $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{2\pi}{3}$; б) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=2$;
в) $f(x)=\sin x,\ x_0=\pi$; г) $f(x)=x^2,\ x_0=-\frac{1}{2}$.

**6.** 1) Запішыце агульную формулу для прыбліжанага вылічэння значэння функцыі, дыферэнцыруемай у пункце $x_0$.
2) Выпішыце формулы для прыбліжанага вылічэння значэнняў функцыі:

а) $f(x)=x^n$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=\sqrt{x}$; г) $f(x)=\frac{1}{x}$.

3) Вылічыце прыбліжаныя значэнні:

а) $\frac{1}{1{,}001^{10}}$; б) $\sin 59°$; в) $\sqrt{9{,}009}$; г) $0{,}999^{15}$.

**7.** 1) У чым заключаецца механічны сэнс вытворнай?
2) Цела рухаецца па прамой згодна з законам $x(t)$. Запішыце формулы для знаходжання скорасці і паскарэння цела ў момант часу $t$.
3) Знайдзіце скорасць і паскарэнне пункта ў момант $t_0$, калі:

а) $x(t)=t^3-2t^2+5,\ t_0=4$; б) $x(t)=3\cos 2t,\ t_0=\frac{\pi}{3}$;
в) $x(t)=5t-t^2,\ t_0=2$; г) $x(t)=2t^2+t-4,\ t_0=4$.

**8.** 1) Запішыце формулу Лагранжа.
2) Сфармулюйце прызнак узрастання (прызнак убывання) функцыі.
3) Даследуйце на ўзрастанне і ўбыванне функцыю:

а) $y=\frac{x}{x^2+9}$; б) $y=3x-\sin 3x$;

в) $y=x^4-4x$; г) $y=x^2+\frac{16}{x}$.

**9.** 1) Які пункт называюць крытычным пунктам функцыі?
2) Сфармулюйце прызнак максімуму (мінімуму) функцыі.
3) Даследуйце на максімум і мінімум функцыю:

а) $y=\frac{x}{2}-x^4$; б) $y=2\sin x+\cos 2x$;
в) $y=x^3-3x$; г) $y=x-\operatorname{tg} x$.

**10.** 1) Апішыце схему даследавання функцыі.
2) Даследуйце з дапамогай вытворнай функцыю:

а) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$; б) $f(x)=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$;
в) $f(x)=x^3-3x^2-9x$; г) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$.

3) Даследуйце па агульнай схеме функцыю $f$ і пабудуйце яе графік:

а) $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$; б) $f(x)=x^2(x-2)^2$;
в) $f(x)=2x^2+3x-1$; г) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$.

**11.** 1) Сфармулюйце правіла знаходжання найбольшага і найменшага значэнняў функцыі на адрэзку.
2) Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі на дадзеным адрэзку:
а) $f(x)=0{,}8x^5-4x^3$, $[-1;\ 2]$;
б) $f(x)=x-\sin 2x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;
в) $f(x)=3x^2-2x^3$, $[-1;\ 4]$;
г) $f(x)=x^2(6-x)$, $[-1;\ 5]$.

3) а) Рознасць двух лікаў роўна 8. Якія павінны быць гэтыя лікі, каб здабытак куба першага ліку на другі быў найменшы?
б) Для стаянкі машын выбралі пляцоўку прамавугольнай формы, якая адной стараной прымыкае да сцяны будынка. Пляцоўку абгарадзілі з трох бакоў металічнай сеткай даўжынёй 200 м, і плошча яе пры гэтым аказалася найбольшая. Якія размеры пляцоўкі?

Раздзел III

# ПЕРШАВОБРАЗНАЯ І ІНТЭГРАЛ

## § 7. ПЕРШАВОБРАЗНАЯ

### 26. Азначэнне першавобразнай

Успомнім прыклад з механікі. Калі ў пачатковы момант часу $t=0$ скорасць цела роўна 0, г. зн. $v(0)=0$, то пры свабодным падзенні цела да моманту часу $t$ пройдзе шлях

$$s(t)=\frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Формула (1) была знойдзена Галілеем эксперыментальна.
Дыферэнцыраваннем знаходзім скорасць:

$$s'(t)=v(t)=gt. \qquad (2)$$

Другое дыферэнцыраванне дае паскарэнне:

$$v'(t)=a(t)=g, \qquad (3)$$

г. зн. паскарэнне пастаяннае.

Больш тыпова для механікі іншае становішча: вядома паскарэнне пункта $a(t)$ (у нашым выпадку яно пастаяннае), трэба знайсці закон змянення скорасці $v(t)$, а таксама знайсці каардынату $s(t)$. Іншымі словамі, па зададзенай вытворнай $v'(t)$, роўнай $a(t)$, трэба знайсці $v(t)$, а потым па вытворнай $s'(t)$, роўнай $v(t)$, знайсці $s(t)$.

Для рашэння такіх задач служыць аперацыя *інтэгравання*, адваротная аперацыі дыферэнцыравання. З ёю мы пазнаёмімся ў гэтым раздзеле.

Азначэнне. **Функцыя $F$ называецца *першавобразнай* для функцыі $f$ на зададзеным прамежку, калі для ўсіх $x$ з гэтага прамежку**

$$F'(x)=f(x). \qquad (4)$$

○ Прыклад 1. Функцыя $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ёсць першавобразная для функцыі $f(x)=x^2$ на інтэрвале $(-\infty;\ \infty)$, паколькі

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x)$$

для ўсіх $x\in(-\infty;\ \infty)$.

Лёгка заўважыць, што $\frac{x^3}{3}+7$ мае тую самую вытворную $x^2$

і таму таксама з'яўляецца першавобразнай для $x^2$ на $\boldsymbol{R}$. Зразумела, што замест 7 можна паставіць любую пастаянную. Такім чынам, мы бачым, што задача знаходжання першавобразнай мае бясконца многа рашэнняў. У наступным пункце вы ўбачыце, як знайсці ўсе гэтыя рашэнні.

Прыклад 2. Для функцыі $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на інтэрвале $(0;\ \infty)$ першавобразнай з'яўляецца функцыя $F(x)=2\sqrt{x}$, паколькі

$$F'(x)=(2\sqrt{x})'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$$

для ўсіх $x$ з гэтага інтэрвалу. Таксама як і ў прыкладзе 1, функцыя $F(x)=2\sqrt{x}+C$ пры любой пастаяннай $C$ ёсць першавобразная для функцыі $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на тым жа інтэрвале $(0;\ \infty)$.

Прыклад 3. Функцыя $F(x)=\frac{1}{x}$ не з'яўляецца першавобразнай для функцыі $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ на прамежку $(-\infty;\ \infty)$, паколькі роўнасць $F'(x)=f(x)$ не выканана ў пункце 0. Аднак у кожным з прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$ функцыя $F$ з'яўляецца першавобразнай для $f$.

### *Практыкаванні*

**326.** Дакажыце, што функцыя $F$ ёсць першавобразная для функцыі $f$ на дадзеным прамежку:

а) $F(x)=x^5,\ f(x)=5x^4,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
б) $F(x)=x^{-3},\ f(x)=-3x^{-4},\ x\in(0;\ \infty)$;
в) $F(x)=\frac{1}{7}x^7,\ f(x)=x^6,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
г) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6},\ f(x)=x^{-7},\ x\in(0;\ \infty)$.

**327.** Ці з'яўляецца функцыя $F$ першавобразнай для функцыі $f$ на дадзеным прамежку:

а) $F(x)=3-\sin x,\ f(x)=\cos x,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
б) $F(x)=5-x^4,\ f(x)=-4x^3,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
в) $F(x)=\cos x-4,\ f(x)=-\sin x,\ x\in(-\infty;\ \infty)$;
г) $F(x)=x^{-2}+2,\ f(x)=\frac{1}{2x^3},\ x\in(0;\ \infty)$?

Знайдзіце адну з першавобразных для функцыі $f$ на $\boldsymbol{R}$ (328—329).

**328.** а) $f(x)=3{,}5$; б) $f(x)=\cos x$;
в) $f(x)=2x$; г) $f(x)=\sin x$.



**329.** а) $f(x)=-\sin x$; б) $f(x)=-x$;
в) $f(x)=-4$; г) $f(x)=-\cos x$.

---

**330.** Дакажыце, што функцыя $F$ ёсць першавобразная для функцыі $f$ на дадзеным прамежку:

а) $F(x)=\sin^2 x,\ f(x)=\sin 2x,\ x\in\boldsymbol{R}$;
б) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x,\ f(x)=-\sin 2x,\ x\in\boldsymbol{R}$;
в) $F(x)=\sin 3x,\ f(x)=3\cos 3x,\ x\in\boldsymbol{R}$;
г) $F(x)=3+\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ f(x)=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ x\in(-\pi;\ \pi)$.

**331.** Ці з'яўляецца функцыя $F$ першавобразнай для функцыі $f$ на дадзеным прамежку:

а) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2},\ f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2},\ x\in\boldsymbol{R}$;
б) $F(x)=\sqrt{4-x^2},\ f(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in(-2;\ 2)$;
в) $F(x)=\frac{1}{x^2},\ f(x)=14-\frac{1}{x^2},\ x\in(0;\ \infty)$;
г) $F(x)=4x\sqrt{x},\ f(x)=6\sqrt{x},\ x\in(0;\ \infty)$?

**332.** Знайдзіце адну з першавобразных для функцыі $f$ на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x)=x+2$; б) $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;
в) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$; г) $f(x)=3x^2+1$.

**333.** Знайдзіце дзве першавобразныя для функцыі $f$:

а) $f(x)=2x$; б) $f(x)=1-\sin x$;
в) $f(x)=x^2$; г) $f(x)=\cos x+2$.

**334.** Сярод трох дадзеных функцый вызначце такую, што дзве іншыя з'яўляюцца адпаведна вытворнай і першавобразнай для яе:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ g(x)=-\frac{1}{x},\ h(x)=-\frac{2}{x^3}$;
б) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x,\ g(x)=1+\cos x,\ h(x)=x+\sin x$;
в) $f(x)=1,\ g(x)=x+2,\ h(x)=\frac{x^2}{2}+2x$;
г) $f(x)=3-2\sin x;\ g(x)=3x+2\cos x;\ h(x)=-2\cos x$.

## 27. Асноўная ўласцівасць першавобразнай

**1. Агульны выгляд першавобразных.** Задача інтэгравання заключаецца ў тым, каб для зададзенай функцыі знайсці ўсе яе першавобразныя. Пры рашэнні гэтай задачы важную ролю адыгрывае наступнае сцверджанне:

Прызнак пастаянства функцыі. *Калі $F'(x)=0$ на некаторым прамежку $I$, то функцыя $F$ — пастаянная на гэтым прамежку.*

Доказ. Зафіксуем некаторае $x_0$ з прамежку $I$. Тады для любога ліку $x$ з гэтага прамежку па формуле Лагранжа можна ўказаць такі лік $c$, які знаходзіцца паміж $x$ і $x_0$, што

$$F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0).$$

Па ўмове $F'(c)=0$, паколькі $c\in \boldsymbol{I}$, значыць,

$$F(x)-F(x_0)=0.$$

Такім чынам, для ўсіх $x$ з прамежку $\boldsymbol{I}$

$$F(x)=F(x_0),$$

г. зн. функцыя $F$ захоўвае пастаяннае значэнне.

Усе першавобразныя функцыі $f$ можна запісаць з дапамогай адной формулы, якую называюць *агульным выглядам першавобразнай для функцыі $f$*. Справядлівая наступная тэарэма *(асноўная ўласцівасць першавобразных)*:

Тэарэма. ***Любая першавобразная для функцыі $f$ на прамежку $I$ можа быць запісана ў выглядзе***

$$\boldsymbol{F(x)+C}, \tag{1}$$

***дзе $F(x)$ — адна з першавобразных для функцыі $f(x)$ на прамежку $I$, а $C$ — адвольная пастаянная.***

Растлумачым гэта сцверджанне, у якім коратка сфармуляваны дзве ўласцівасці першавобразнай:

1) які б лік ні паставіць у выраз (1) замест $C$, атрымаем першавобразную для $f$ на прамежку $I$;

2) якую б першавобразную $\Phi$ для $f$ на прамежку $I$ ні ўзяць, можна падабраць такі лік $C$, што для ўсіх $x$ з прамежку $I$ будзе выканана роўнасць

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

Доказ. 1) Па ўмове функцыя $F$ — першавобразная для $f$ на прамежку $I$. Значыць, $F'(x)=f(x)$ для любога $x\in I$, таму

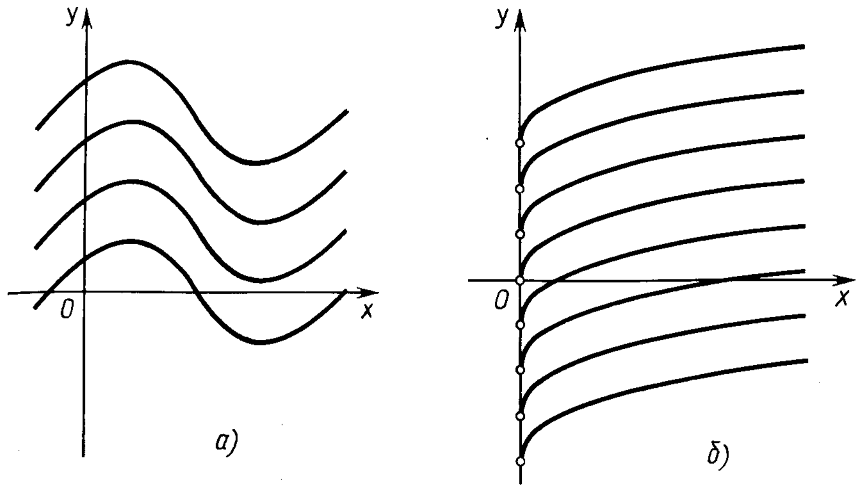
$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x),$$

г. зн. $F(x)+C$ — першавобразная для функцыі $f$.

2) Няхай $\Phi(x)$ — адна з першавобразных для функцыі $f$ на тым жа прамежку $I$, г. зн. $\Phi'(x)=f(x)$ для ўсіх $x\in I$. Тады

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$






Рыс. 118

Адсюль вынікае па прызнаку пастаянства функцыі, што рознасць $\Phi(x)-F(x)$ ёсць функцыя, якая прымае некаторае пастаяннае значэнне $C$ на прамежку $I$.

Такім чынам, для ўсіх $x$ з прамежку $I$ правільная роўнасць $\Phi(x)-F(x)=C$, што і патрабавалася даказаць.

Асноўнай уласцівасці першавобразнай можна надаць геаметрычны сэнс: *графікі любых дзвюх першавобразных для функцый $f$ атрымліваюцца адзін з аднаго паралельным пераносам уздоўж восі $Oy$* (рыс. 118, *а*).

**2. Прыклады знаходжання першавобразных.**

Прыклад 1. Знойдзем агульны выгляд першавобразных для функцыі $f(x)=-x^3$ на $\boldsymbol{R}$.

Заўважым, што адной з першавобразных функцыі $f$ з'яўляецца функцыя $-\frac{x^4}{4}$, паколькі $\left(-\frac{x^4}{4}\right)'=-x^3$. Па даказанай тэарэме агульны выгляд першавобразных для функцыі $f$ такі:

$$F(x)=-\frac{x^4}{4}+C.$$

Прыклад 2. Знойдзем першавобразную $F_0(x)$ для функцыі $f(x)=\frac{1}{x^2}$ на прамежку $(0;\ \infty)$, якая прымае пры $x=1$ значэнне 1.

Лёгка праверыць, што любая першавобразная функцыі $f$ мае выгляд $F(x)=-\frac{1}{x}+C$. Паколькі па ўмове $F(1)=1$, прыходзім да ўраўнення (адносна $C$) выгляду $-1+C=1$, адкуль $C=2$, і, значыць, $F_0(x)=-\frac{1}{x}+2$.

Прыклад 3. Пункт рухаецца па прамой з пастаянным паскарэннем $a$. У пачатковы момант $t_0=0$ пункт мае пачатковую каардынату $x_0$ і пачатковую скорасць $v_0$. Знойдзем каардынату $x(t)$ пункта як функцыю ад часу.

Паколькі $x'(t)=v(t)$ і $v'(t)=a(t)$, з умовы $a(t)=a$ атрымліваем $v'(t)=a$. Адсюль вынікае, што

$$v(t)=at+C_1. \qquad (2)$$

Падстаўляючы $t_0=0$ у формулу (2), знаходзім $C_1=v_0$ і

$$x'(t)=v(t)=at+v_0.$$

Значыць,

$$x(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+C_2. \qquad (3)$$

Каб знайсці $C_2$, падставім у (3) значэнне $t_0=0$, адкуль $C_2=x_0$. Такім чынам,

$$x(t)=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0. \bullet$$

Заўвага. Для кароткасці пры знаходжанні першавобразнай функцыі $f$ прамежак, на якім зададзена $f$, звычайна не ўказваюць. Маюцца на ўвазе прамежкі магчыма большай даўжыні. Так, у наступным прыкладзе натуральна лічыць, што функцыя $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ зададзена на інтэрвале $(0;\ \infty)$.

Прыклад 4. Знойдзем для функцыі $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ першавобразную, графік якой праходзіць праз пункт $M(9;\ -2)$.

Любая першавобразная функцыі $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ запісваецца ў выглядзе $2\sqrt{x}+C$. Графікі гэтых першавобразных паказаны на рысунку 118, *б*. Каардынаты пункта $M(9;\ -2)$ графіка шукаемай першавобразнай павінны задавальняць ураўненню $2\sqrt{9}+C=-2$. Адсюль знаходзім, што $C=-8$. Значыць, $F(x)=2\sqrt{x}-8$. $\bullet$

Ніжэй прыводзіцца табліца першавобразных для некаторых функцый:

| Функцыя $f$ | $k$ (пастаянная) | $x^n$ ($n\in \mathbf{Z}$, $n\neq -1$) | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Агульны выгляд першавобразных для $f$ | $kx+C$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ | $2\sqrt{x}+C$ | $-\cos x+C$ | $\sin x+C$ | $\operatorname{tg} x+C$ | $-\operatorname{ctg} x+C$ |

Праверце правільнасць запаўнення гэтай табліцы самастойна.



### *Практыкаванні*

Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для функцыі $f$ (335—336).

**335.** а) $f(x)=2-x^4$; б) $f(x)=x+\cos x$; в) $f(x)=4x$; г) $f(x)=-3$.

**336.** а) $f(x)=x^6$; б) $f(x)=\frac{1}{x^3}-2$; в) $f(x)=1-\frac{1}{x^4}$; г) $f(x)=x^5$.

**337.** Для функцыі $f$ знайдзіце першавобразную $F$, якая прымае зададзенае значэнне ва ўказаным пункце:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=-12$; б) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;
в) $f(x)=x^3$, $F(-1)=2$; г) $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-1$.

**338.** Праверце, што функцыя $F$ з'яўляецца першавобразнай для функцыі $f$. Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для $f$, калі:

а) $F(x)=\sin x-x\cos x$, $f(x)=x\sin x$;
б) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
в) $F(x)=\cos x+x\sin x$, $f(x)=x\cos x$;
г) $F(x)=x-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}$.

**339.** Для функцыі $f$ знайдзіце першавобразную, графік якой праходзіць праз дадзены пункт $M$:

а) $f(x)=2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2};\ 1\right)$;
б) $f(x)=1-x^2$, $M(-3;\ 9)$;
в) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3};\ -1\right)$;
г) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$.

**340.** Для функцыі $f$ знайдзіце дзве першавобразныя, адлегласць паміж адпаведнымі пунктамі графікаў якіх (г. зн. пунктамі з роўнымі абсцысамі) роўная $a$:

а) $f(x)=2-\sin x$, $a=4$; б) $f(x)=1+\operatorname{tg}^2 x$, $a=1$;
в) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$, $a=0{,}5$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=2$.

**341.** Пункт рухаецца па прамой з паскарэннем $a(t)$. У пачатковы момант $t_0$ яго каардыната роўна $x_0$, а скорасць $v_0$. Знайдзіце каардынату $x(t)$ пункта як функцыю ад часу:

а) $a(t)=-2t$, $t_0=1$, $x_0=4$, $v_0=2$;

б) $a(t)=\sin t,\ t_0=\frac{\pi}{2},\ x_0=2,\ v_0=1;$

в) $a(t)=6t,\ t_0=0,\ x_0=3,\ v_0=1;$

г) $a(t)=\cos t,\ t_0=\pi,\ x_0=1,\ v_0=0.$

## 28. Тры правілы знаходжання першаабразных

Гэтыя правілы падобныя на адпаведныя правілы дыферэнцыравання.

Правіла 1. ***Калі $F$ ёсць першаабразная для $f$, а $G$ — першаабразная для $g$, то $F+G$ ёсць першаабразная для $f+g$.***

Сапраўды, паколькі $F'=f$ і $G'=g$, па правілу вылічэння вытворнай сумы маем:

$$(F+G)'=F'+G'=f+g.$$

Правіла 2. ***Калі $F$ ёсць першаабразная для $f$, а $k$ — пастаянная, то функцыя $kF$ — першаабразная для $kf$.***

Сапраўды, пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай, таму

$$(kF)'=kF'=kf.$$

Правіла 3. ***Калі $F(x)$ ёсць першаабразная для функцыі $f(x)$, а $k$ і $b$ — пастаянныя, прычым $k\neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ ёсць першаабразная для $f(kx+b)$.***

Сапраўды, па правілу вылічэння вытворнай складанай функцыі маем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k=f(kx+b).$$

Прывядзём прыклады прымянення гэтых правіл.

Прыклад 1. Знойдзем агульны выгляд першаабразных для функцыі

$$f(x)=x^3+\frac{1}{x^2}.$$

Паколькі для $x^3$ адна з першаабразных ёсць $\frac{x^4}{4}$, а для $\frac{1}{x^2}$ адной з першаабразных з'яўляецца $-\frac{1}{x}$, па правілу 1 знаходзім: адной з першаабразных для функцыі $f(x)=x^3-\frac{1}{x^2}$ будзе $\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}$. Адказ. $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{1}{x}+C$.

Прыклад 2. Знойдзем адну з першаабразных для $f(x)=5\cos x$.

Паколькі для $\cos x$ адна з першаабразных ёсць $\sin x$, то, прымяняючы правіла 2, атрымліваем адказ: $F(x)=5\sin x$.



Прыклад 3. Знойдзем адну з першаабразных для функцыі $y=\sin(3x-2)$.

Для $\sin x$ адной з першаабразных з'яўляецца $-\cos x$, таму па правілу 3 шукаемая першаабразная роўна $F(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-2)$.

Прыклад 4. Знойдзем адну з першаабразных для функцыі

$$f(x)=\frac{1}{(7-3x)^5}.$$

Паколькі для $\frac{1}{x^5}$ першаабразнай з'яўляецца $-\frac{1}{4x^4}$, то па правілу 3 шукаемая першаабразная роўна $F(x)=\frac{1}{-3}\times\times\frac{-1}{4(7-3x)^4}=\frac{1}{12(7-3x)^4}$.

Прыклад 5. Матэрыяльны пункт масай 2 кг рухаецца па восі $Ox$ пад дзеяннем сілы, накіраванай уздоўж восі. У момант часу $t$ гэта сіла роўна $F(t)=3t-2$. Знайдзіце закон $x(t)$ руху пункта, калі вядома, што пры $t=2$ с скорасць пункта роўна 3 м/с, а каардыната роўна 1. ($F$ — сіла ў ньютанах, $t$ — час у секундах, $x$ — шлях у метрах.)

Згодна з другім законам Ньютана $F=ma$, дзе $a$ — паскарэнне. Маем

$$a(t)=\frac{F}{m}=\frac{3}{2}t-1.$$

Скорасць $v(t)$ пункта ёсць першаабразная для яе паскарэння $a(t)$, таму

$$v(t)=\frac{3}{4}t^2-t+C_1.$$

Пастаянную $C_1$ знаходзім з умовы $v(2)=3$:

$$\frac{3}{4}\cdot 4-2+C_1=3,\text{ г. зн. } C_1=2 \text{ і } v(t)=\frac{3}{4}t^2-t+2.$$

Каардыната $x(t)$ ёсць першаабразная для скорасці $v(t)$, таму

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t+C_2.$$

Пастаянную $C_2$ знаходзім з умовы $x(2)=1$:

$$\frac{1}{4}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 4+4+C_2=1,\ C_2=-3.$$

Такім чынам, закон руху пункта

$$x(t)=\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t-3. \bullet$$

*Практыкаванні*

Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для функцыі $f$ (342—344).

**342.** а) $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$; б) $f(x)=x-\frac{2}{x^5}+\cos x$;

в) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$; г) $f(x)=5x^2-1$.

**343.** а) $f(x)=(2x-3)^5$; б) $f(x)=3\sin 2x$;

в) $f(x)=(4-5x)^7$; г) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

**344.** а) $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$; б) $f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$;

в) $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$; г) $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

**345.** Знайдзіце для функцыі $f$ першавобразную, графік якой праходзіць праз пункт $M$:

а) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;\ 4)$; б) $f(x)=x^3+2$, $M(2;\ 15)$;

в) $f(x)=1-2x$, $M(3;\ 2)$; г) $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3$, $M(1;\ 5)$.

---

**346.** Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для функцыі:

а) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

б) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

в) $f(x)=\frac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x$;

г) $f(x)=\frac{1}{(3-2x)^3}+\frac{3}{\sqrt{5x-2}}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

**347.** Задайце першавобразную $F$ для функцыі $f$ формулай, калі вядомы каардынаты пункта $M$ графіка $F$:

а) $f(x)=2x+1$, $M(0;\ 0)$;
б) $f(x)=3x^2-2x$, $M(1;\ 4)$;
в) $f(x)=x+2$, $M(1;\ 3)$;
г) $f(x)=-x^2+3x$, $M(2;\ -1)$.

**348.** Скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна, зададзена формулай $v(t)=t^2+2t-1$. Запішыце формулу залежнасці яго каардынаты $x$ ад часу $t$, калі вядома, што ў пачатковы момант часу ($t=0$) пункт знаходзіўся ў пачатку каардынат.



**349.** Скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна, зададзена формулай $v(t)=2\cos\frac{t}{2}$. Знайдзіце формулу, якая выражае залежнасць каардынаты пункта ад часу, калі вядома, што ў момант $t=\frac{\pi}{3}$ с пункт знаходзіўся на адлегласці 4 м ад пачатку каардынат.

**350.** Пункт рухаецца прамалінейна з паскарэннем $a(t)=12t^2+4$. Знайдзіце закон руху пункта, калі ў момант $t=1$ с яго скорасць роўна 10 м/с, а каардыната роўна 12 (адзінка вымярэння $a$ роўна 1 м/с$^2$).

**351.** Матэрыяльны пункт масай $m$ рухаецца па восі $Ox$ пад дзеяннем сілы, накіраванай уздоўж гэтай восі. У момант часу $t$ сіла роўна $F(t)$. Знайдзіце формулу залежнасці $x(t)$ ад часу $t$, калі вядома, што пры $t=t_0$ скорасць пункта роўна $v_0$, а каардыната роўна $x_0$($F(t)$ вымяраецца ў ньютанах, $t$ — у секундах, $v$ — у метрах у секунду, $m$ — у кілаграмах):

а) $F(t)=6-9t$, $t_0=1$, $v_0=4$, $x_0=-5$, $m=3$;
б) $F(t)=14\sin t$, $t_0=\pi$, $v_0=2$, $x_0=3$, $m=7$;
в) $F(t)=25\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $v_0=2$, $x_0=4$, $m=5$;
г) $F(t)=8t+8$, $t_0=2$, $v_0=9$, $x_0=7$, $m=4$.

**352.** Графік першавобразнай $F_1$ для функцыі $f$ праходзіць праз пункт $M$, а першавобразнай $F_2$ — праз пункт $N$. Якая розніца гэтых першавобразных? Які з графікаў $F_1$ і $F_2$ размешчаны вышэй, калі:

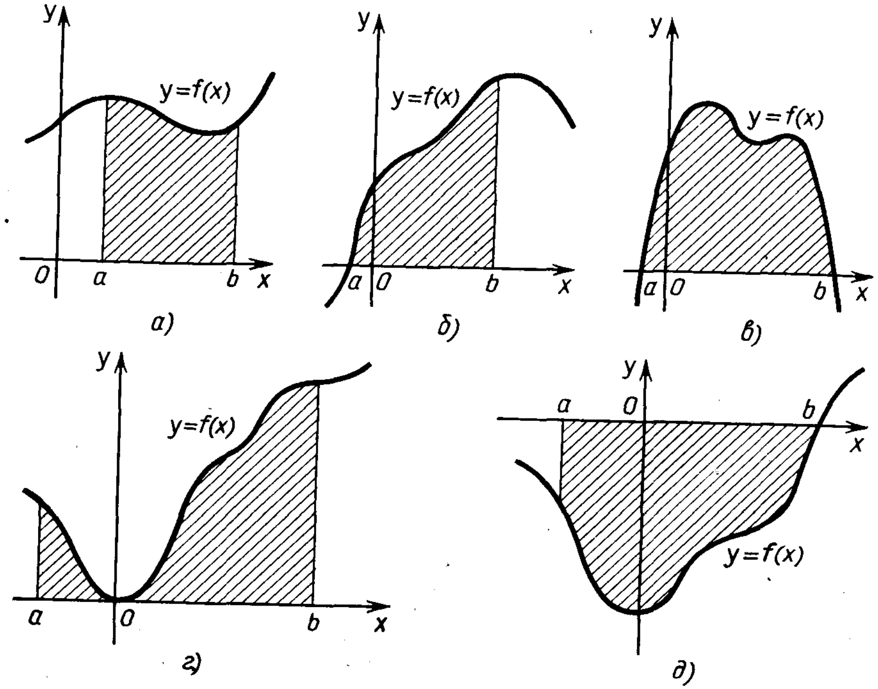
а) $f(x)=3x^2-2x+4$, $M(-1;\ 1)$, $N(0;\ 3)$;
б) $f(x)=4x-6x^2+1$, $M(0;\ 2)$, $N(1;\ 3)$;
в) $f(x)=4x-x^3$, $M(2;\ 1)$, $N(-2;\ 3)$;
г) $f(x)=(2x+1)^2$, $M(-3;\ -1)$, $N\left(1;\ 6\frac{1}{3}\right)$?

## § 8. ІНТЭГРАЛ

### 29. Плошча крывалінейнай трапецыі

Няхай на адрэзку $[a;\ b]$ восі $Ox$ зададзена неперарыўная функцыя $f$, якая не мяняе на ім знака. Фігуру, абмежаваную графікам гэтай функцыі, адрэзкам $[a;\ b]$ і прамымі $x=a$ і $x=b$ (рыс. 119), называюць *крывалінейнай трапецыяй.* Розныя прыклады крывалінейных трапецый прыведзены на рысунку 119, $a$—$д$.

Для вылічэння плошчаў крывалінейных трапецый карыстаюцца наступнай тэарэмай:

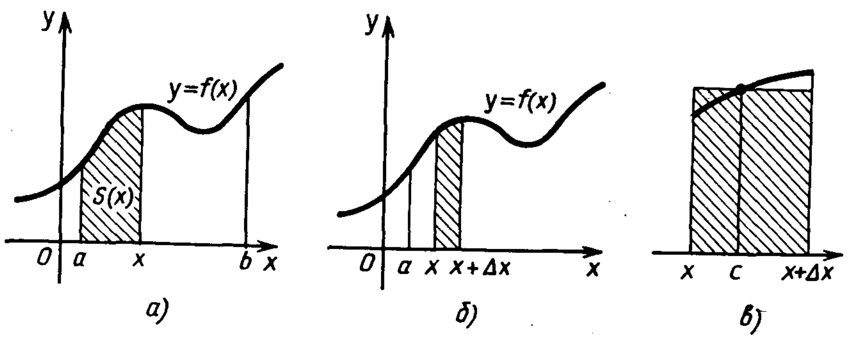



Рыс. 119

Тэарэма: ***Калі f — непарыўная і неадмоўная на адрэзку [a; b] функцыя, а F — яе першаабразная на гэтым адрэзку, то плошча S адпаведнай крывалінейнай трапецыі*** (рыс. 120) ***роўна прырашчэнню першаабразнай на адрэзку [a; b], г. зн.***

$$S = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Доказ. Разгледзім функцыю $S(x)$, вызначаную на адрэзку $[a; b]$. Калі $a < x \leqslant b$, то $S(x)$ — плошча той часткі крывалінейнай




Рыс. 120



трапецыі, якая размешчана лявей за вертыкальную прамую, што праходзіць праз пункт $M(x; 0)$ (рыс. 120, *а*). Калі $x = a$, то $S(a) = 0$. Адзначым, што $S(b) = S$ ($S$ — плошча крывалінейнай трапецыі).

Дакажам, што

$$S'(x) = f(x). \qquad (2)$$

Па азначэнню вытворнай трэба даказаць, што

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x) \text{ пры } \Delta x \to 0. \qquad (3)$$

Высветлім геаметрычны сэнс лічніка $\Delta S(x)$. Для прастаты разгледзім выпадак $\Delta x > 0$. Паколькі $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, то $\Delta S(x)$ — плошча фігуры, заштрыхаванай на рысунку 120, *б*. Возьмем цяпер прамавугольнік той жа плошчы $\Delta S(x)$, які абапіраецца на адрэзак $[x; x + \Delta x]$ (рыс. 120, *в*). Верхняя старана прамавугольніка перасякае графік функцыі (з прычыны яе непарыўнасці) у некаторым пункце з абсцысай $c \in [x; x + \Delta x]$ (інакш гэты прамавугольнік або змяшчаецца ў частцы крывалінейнай трапецыі над адрэзкам $[x; x + \Delta x]$, або змяшчае яе; адпаведна яго плошча будзе меншай або большай за плошчу $\Delta S(x)$). Вышыня прамавугольніка роўна $f(c)$. Па формуле плошчы прамавугольніка маем $\Delta S(x) = f(c)\Delta x$, адкуль $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$. (Гэта формула правільная і пры $\Delta x < 0$.) Паколькі пункт $c$ ляжыць паміж $x$ і $x + \Delta x$, то $c$ імкнецца да $x$ пры $\Delta x \to 0$. Паколькі функцыя $f$ непарыўная, $f(c) \to f(x)$ пры $\Delta x \to 0$. Такім чынам, $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$ пры $\Delta x \to 0$.

Формула (2) даказана.

Мы атрымалі, што $S$ ёсць першаабразная для $f$. Таму па асноўнай уласцівасці першаабразных для ўсіх $x \in [a; b]$ маем:

$$S(x) = F(x) + C,$$

дзе $C$ — некаторая пастаянная, а $F$ адна з першаабразных для функцый $f$. Для знаходжання $C$ падставім $x = a$:

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

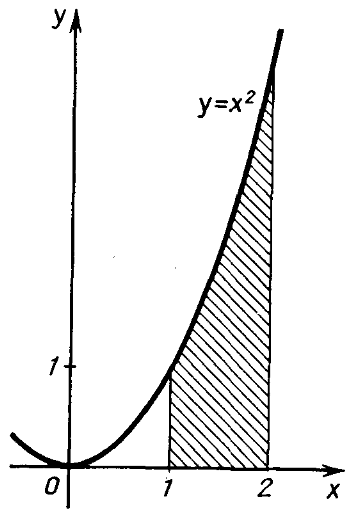
адкуль $C = -F(a)$. Значыць,

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (4)$$

Паколькі плошча крывалінейнай трапецыі роўна $S(b)$, падстаўляючы ў формулу (4) $x = b$, атрымаем:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

○ Прыклад. Вылічым плошчу $S$ крывалінейнай трапецыі, якая абмежавана графікам функцыі $f(x) = x^2$, прамымі $y = 0$, $x = 1$ і $x = 2$ (рыс. 121).




Рыс. 121

Для функцыі $f(x)=x^2$ адной з першавобразных з'яўляецца функцыя $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Значыць,

$$S=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{7}{3}. \bullet$$

Вы бачылі, што вылічэнне вытворнай функцыі ў большасці выпадкаў звязана толькі з цяжкасцямі вылічальнага характару. Складаная справа са знаходжаннем першавобразных. Так, не адразу зразумела, ці мае дадзеная функцыя першавобразную, ці не мае. У сувязі з гэтым адзначым, што любая неперарыўная на прамежку $I$ функцыя мае на гэтым прамежку першавобразную. Тлумачэнне гэтага факта дае доказ формулы (2), прыведзены вышэй. Аднак першавобразныя некаторых функцый нельга запісаць з дапамогай вывучаемых у школе функцый. Прыкладам такіх функцый з'яўляецца функцыя $y=\sqrt{x^3+1}$. ▲

### *Практыкаванні*

Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі (353—354).

**353.** а) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$; б) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;

в) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$;

г) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

**354.** а) $y=x^3+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

б) $y=1+2\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;

в) $y=4-x^2$, $y=0$;

г) $y=1+\frac{1}{2}\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

---

Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі (355—356).

**355.** а) $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=0$;

б) $y=\frac{1}{(x+1)^2}+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=2x-x^2$, $y=0$; г) $y=-(x-1)^3$, $y=0$, $x=0$.



**356.** а) $y=3\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$, $y=0$, $x=-\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$;

б) $y=2\cos 2x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$;

в) $y=\sin x-\frac{1}{2}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$;

г) $y=1-\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}$.

## 30. Інтэграл. Формула Ньютана — Лейбніца

**1. Паняцце аб інтэграле.** Разгледзім другі падыход да задачы вылічэння плошчы крывалінейнай трапецыі. Для прастаты будзем лічыць функцыю $f$ неадмоўнай і неперарыўнай на адрэзку $[a; b]$, тады плошчу $S$ адпаведнай крывалінейнай трапецыі можна прыбліжана падлічыць наступным чынам.

Разаб'ём адрэзак $[a; b]$ на $n$ адрэзкаў аднолькавай даўжыні пунктамі $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, і няхай $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$, дзе $k=1, 2, \ldots, n-1, n$. На кожным з адрэзкаў $[x_{k-1}; x_k]$ як на аснове пабудуем прамавугольнік вышынёй $f(x_{k-1})$. Плошча гэтага прамавугольніка роўна

$$f(x_{k-1})\Delta x=\frac{b-a}{n}f(x_{k-1}),$$

а сума плошчаў усіх такіх прамавугольнікаў (рыс. 122) роўна

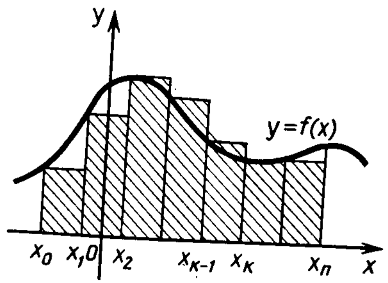
$$S_n=\frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

З прычыны неперарыўнасці функцыі $f$ аб'яднанне пабудаваных прамавугольнікаў пры вялікім $n$, г. зн. пры малым $\Delta x$, «амаль супадае» з крывалінейнай трапецыяй, якая нас цікавіць. Таму ўзнікае меркаванне, што $S_n\approx S$ пры вялікіх $n$. (Коратка гавораць: «$S_n$ імкнецца да $S$ пры $n$, што імкнецца да бесканечнасці» — і пішуць: $S_n\to S$ пры $n\to\infty$.)

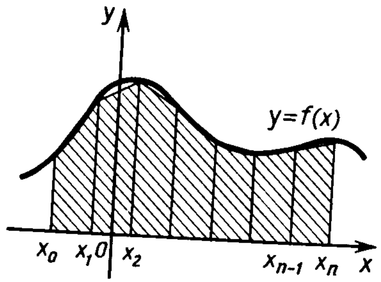
Дапушчэнне гэта правільнае. Больш таго, для любой неперарыўнай на адрэзку $[a; b]$ функцыі $f$ (не абавязкова неадмоўнай) $S_n$ пры $n\to\infty$ імкнецца да некаторага ліку. Гэты лік называюць (па азначэнню) *інтэгралам функцыі $f$ ад $a$ да $b$* і абазначаюць $\int_a^b f(x)dx$, г. зн.

$$S_n\to\int_a^b f(x)dx \text{ пры } n\to\infty \qquad (1)$$

(чытаецца: «Інтэграл ад $a$ да $b$ эф ад ікс дэ ікс»). Лікі $a$ і $b$ называюцца *граніцамі інтэгравання:* $a$ — ніжняй граніцай, $b$ — верхняй. Знак $\int$ называюць *знакам інтэграла.* Функцыя $f$ называ-




Рыс. 122




Рыс. 123

ецца *падынтэгральнай функцыяй*, а пераменная $x$ — *пераменнай інтэгравання*.

Такім чынам, калі $f(x) \geqslant 0$ на адрэзку $[a;\ b]$, то плошча $S$ адпаведнай крывалінейнай трапецыі выражаецца формулай

$$\boldsymbol{S=\int_a^b f(x)\,dx.} \qquad (2)$$

▽ Для прыбліжанага вылічэння інтэграла можна разглядаць сумы $S_n$. Лепш, аднак, выкарыстаць сумы

$$S_n=\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right),$$

складаемыя якіх (у выпадку дадатнай функцыі $f$) роўны плошчам трапецый, «упісаных» у крывалінейную трапецыю і абмежаваных ломанымі, як гэта паказана на рысунку 123.

Сапраўды, прымяняючы формулу плошчы трапецыі, атрымліваем:

$$S_n=\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\ldots=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right). \blacktriangle$$

**2. Формула Ньютана — Лейбніца.** Параўноўваючы формулы плошчы крывалінейнай трапецыі

$$S=F(b)-F(a) \text{ і } S=\int_a^b f(x)dx,$$

робім вывад: *калі $F$ — першавобразная для $f$ на $[a;\ b]$, то*

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).} \qquad (3)$$

Формула (3) называецца *формулай Ньютана — Лейбніца.* Яна правільная для любой функцыі $f$, непарарыўнай на адрэзку $[a;\ b]$.



Разгледзім прыклады прымянення формулы Ньютана — Лейбніца.

○ Прыклад 1. Вылічым $\int_{-1}^{2} x^2dx$.

Паколькі для $x^2$ адной з першавобразнай з'яўляецца $\frac{x^3}{3}$,

$$\int_{-1}^{2} x^2dx=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=3.$$

Для зручнасці запісу рознасць $F(b)-F(a)$ (прырашчэнне функцыі $F$ на адрэзку $[a;\ b]$) прынята скарочана абазначаць $F(x)\big|_a^b$, г. зн.

$$F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b.$$

Карыстаючыся гэтым абазначэннем, формулу Ньютана — Лейбніца звычайна запісваюць у выглядзе

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b. \qquad (4)$$

Прыклад 2. Вылічым $\int_0^{\pi}\sin x dx$.

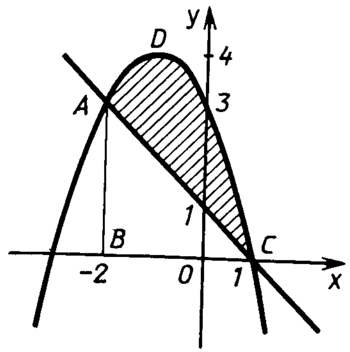
Карыстаючыся ўведзенымі абазначэннямі, атрымаем:

$$\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=2. \bullet$$

Заўвага 1. Дадзенае намі азначэнне інтэграла не дазваляе гаварыць, напрыклад, аб інтэграле ад $-1$ да 2 функцыі $\frac{1}{x^2}$, таму што гэта функцыя не з'яўляецца неперарыўнай на адрэзку $[-1;\ 2]$. Заўважым таксама, што функцыя $-\frac{1}{x}$ не з'яўляецца першавобразнай для функцыі $\frac{1}{x^2}$ на гэтым адрэзку, паколькі пункт 0, які належыць адрэзку, не ўваходзіць у вобласць вызначэння функцыі.

○ Прыклад 3. Вылічым плошчу фігуры, абмежаванай лініямі $y=1-x$ і $y=3-2x-x^2$.

Нарысуем гэтыя лініі (рыс. 124) і знойдзем абсцысы пунктаў іх перасячэння з ураўнення $1-x=3-2x-x^2$. Рашаючы гэта ўраўненне, знаходзім $x=1$ і $x=-2$. Шукаемая




Рыс. 124

плошча можа быць атрымана як рознасць плошчаў крывалінейнай трапецыі $BADC$ і трохвугольніка $BAC$. Па формуле (2) маем:

$$S_{BADC}=\int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)dx=\left(3x-x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(3-1-\frac{1}{3}\right)-\left(3\cdot(-2)-(-2)^2-\frac{(-2)^3}{3}\right)=9.$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}.$$

Такім чынам, плошча заштрыхаванай фігуры роўна

$$S=S_{BADC}-S_{\triangle BAC}=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}=4{,}5. \; ●$$

З а ў в а г а 2. Зручна расшырыць паняцце інтэграла, дапускаючы па азначэнню пры $a\geqslant b$, што

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Пры такім пагадненні формула Ньютана — Лейбніца аказваецца правільнай пры адвольных $a$ і $b$ (у прыватнасці, $\int_a^a f(x)dx=0$).

### *Практыкаванні*

Вылічыце інтэгралы (357—358).

**357.** а) $\int_{-1}^{2}x^4dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$; в) $\int_{1}^{3}x^3dx$; г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

**358.** а) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(2x+1)^2}$; б) $\int_{0}^{\pi}3\cos\frac{x}{2}dx$; в) $\int_{1}^{10}\frac{dx}{x^2}$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$.

**359.** Дакажыце справядлівасць роўнасці:

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_{0}^{1}dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\int_{0}^{\sqrt[3]{3}}x^2dx$; г) $\int_{0}^{1}(2x+1)dx=\int_{0}^{2}(x^3-1)dx$.

Вылічыце (папярэдне зрабіўшы рысунак) плошчу фігуры, абмежаванай лініямі (360—361).



**360.** а) $y=x^4$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$; б) $y=x^4$, $y=1$;
в) $y=x^2-4x+5$, $y=0$, $x=0$, $x=4$;
г) $y=x^2-4x+5$, $y=5$.

**361.** а) $y=1-x^3$, $y=0$, $x=0$;
б) $y=2-x^3$, $y=1$, $x=-1$, $x=1$;
в) $y=-x^2-4x$, $y=0$, $x=-3$, $x=-1$;
г) $y=-x^2-4x$, $y=1$, $x=-3$, $x=-1$.

---

Вылічыце інтэгралы (362—363).

**362.** а) $\int_{-\pi}^{2\pi}\sin\frac{x}{3}dx$; б) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; в) $\int_{0}^{3\pi}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; г) $\int_{-2}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

**363.** а) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2dx$; б) $\int_{0}^{2}(1+2x)^3dx$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}(1+\cos 2x)dx$; г) $\int_{1}^{4}\left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$.

Вылічыце (папярэдне зрабіўшы рысунак) плошчу фігуры, абмежаванай лініямі (364—366).

**364.** а) $y=x^3$, $y=8$, $x=1$;
б) $y=2\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$;
в) $y=x^2-2x+4$, $y=3$, $x=-1$;
г) $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$.

**365.** а) $y=4x-x^2$, $y=4-x$;
б) $y=\frac{16}{x^2}$, $y=2x$, $x=4$;
в) $y=x^2$, $y=2x$;
г) $y=6-2x$, $y=6+x-x^2$.

**366.** а) $y=x^2-4x+4$, $y=4-x^2$;
б) $y=x^2-2x+2$, $y=2+6x-x^2$;
в) $y=x^2$, $y=2x-x^2$;
г) $y=x^2$, $y=x^3$.

**367.** Вылічыце плошчу фігуры, якая абмежавана графікам функцыі $y=8x-2x^2$ і з'яўляецца датычнай да гэтай парабалы ў яе вяршыні і прамой $x=0$.

**368.** Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай графікам функцыі $f(x)=8-0{,}5x^2$, датычнай да яго ў пункце з абсцысай $x=-2$ і прамой $x=1$.

**369.** Дакажыце роўнасць:

а) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

б) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (дзе $k$ — пастаянная).

### 31. Прымяненні інтэграла

**1. Вылічэнне аб'ёмаў цел.** Няхай зададзена цела аб'ёмам $V$, *прычым ёсць такая прамая* (рыс. 125), *што, якую б плоскасць, перпендыкулярную гэтай прамой, мы ні ўзялі, нам вядома плошча $S$ сячэння цела гэтай плоскасцю.* Але плоскасць, перпендыкулярная восі $Ox$, перасякае яе ў некаторым пункце $x$. Значыць, кожнаму ліку $x$ (з адрэзка $[a; b]$, гл. рыс. 125) пастаўлены ў адпаведнасць адзіны лік $S(x)$ — плошча сячэння цела гэтай плоскасцю. Тым самым на адрэзку $[a; b]$ зададзена функцыя $S(x)$. Калі функцыя $S$ непарарыўная на адрэзку $[a; b]$, то справядлівая формула

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

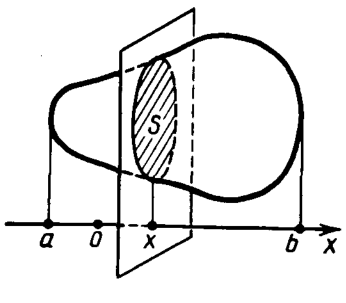
Поўны доказ гэтай формулы даецца ў курсах матэматычнага аналізу, а тут спынімся на наглядных меркаваннях, якія прыводзяць да яе.

Разаб'ём адрэзак $[a; b]$ на $n$ адрэзкаў роўнай даўжыні пунктамі $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$, і няхай

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

(гл. п. 30). Праз кожны пункт $x_k$ правядзём плоскасць, перпендыкулярную восі $Ox$. Гэтыя плоскасці разразаюць зададзенае цела на слаі (рыс. 126, *а, б*). Аб'ём слою, заключанага паміж плоскасцямі $\alpha_{k-1}$ і $\alpha_k$, пры дастаткова вялікіх $n$ прыбліжана роўны плошчы $S(x_{k-1})$ сячэння, памножанай на «таўшчыню слою» $\Delta x$, і таму

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\Delta x = V_n.$$

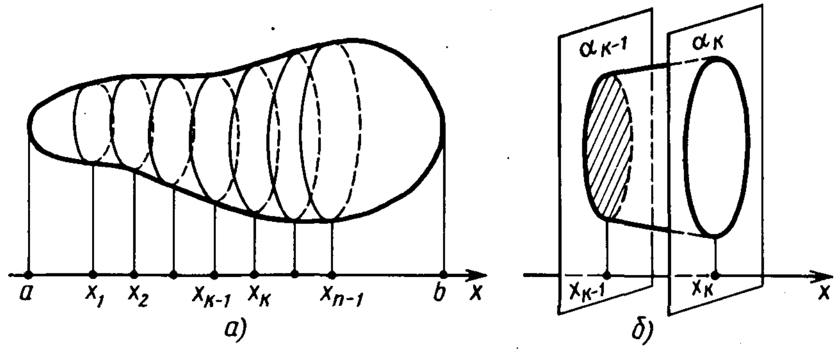


Рыс. 125

Дакладнасць гэтай прыбліжанай роўнасці тым вышэйшая, чым танчэйшыя слаі, на якія разрэзана цела, г. зн. чым больш $n$. Таму $V_n \to V$ пры $n \to \infty$. Па азначэнню інтэграла

$$V_n \to \int_a^b S(x)dx \text{ пры } n \to \infty.$$





Рыс. 126

○ Прыклад 1. Дакажам, што аб'ём усечанай пірамiды вышынёй $H$ з плошчамі асноў $S$ і $s$ роўны $\frac{1}{3}H(S+s+\sqrt{Ss})$.

Няхай пункт $O$ — вяршыня «поўнай» піраміды (рыс. 127). *Правядзём праз пункт $O$ вось $Ox$ перпендыкулярна аснове піраміды.* Асновы ўсечанай піраміды перасякаюць вось $Ox$ у пунктах $a$ і $b$. Кожная плоскасць, якая перпендыкулярная восі $Ox$ і перасякае адрэзак $[a; b]$ гэтай восі ў пункце $x$, дае ў сячэнні многавугольнік, падобны многавугольніку — аснове піраміды. Таму плошча сячэння $S(x)$ роўна $kx^2$, і, у прыватнасці,

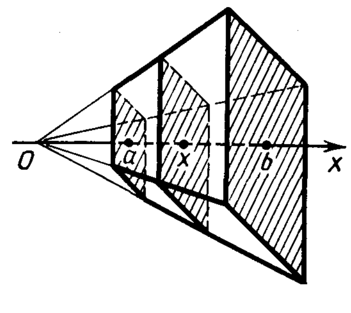
$$s = S(a) = ka^2 \text{ і } S = S(b) = kb^2.$$

Аб'ём усечанай піраміды вылічваем па формуле (1):

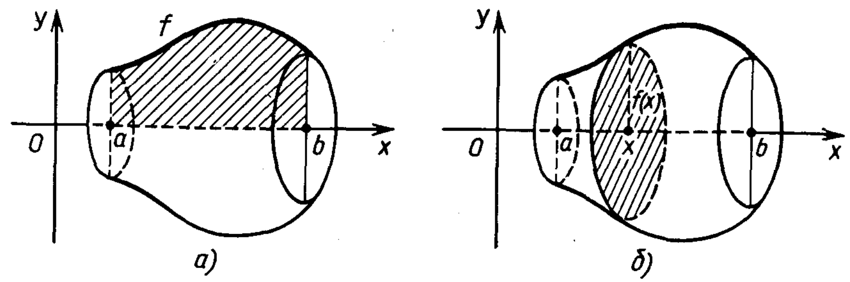
$$V = \int_a^b kx^2dx = \frac{kx^3}{3}\Big|_a^b = \frac{k}{3}(b^3-a^3) = \frac{b-a}{3}(kb^2+kab+ka^2) =$$
$$= \frac{H}{3}(S+\sqrt{Ss}+s).$$

Прыклад 2. Няхай крывалінейная трапецыя абапіраецца на адрэзак $[a; b]$ восі $Ox$ і абмежавана зверху графікам функцыі $f$, неадмоўнай і непарарыўнай на адрэзку $[a; b]$. Пры вярчэнні гэтай крывалінейнай трапецыі вакол восі $Ox$ атрымліваем цела (рыс. 128, *а*), аб'ём якога знаходзіцца па формуле

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx. \qquad (2)$$



Рыс. 127




Рыс. 128

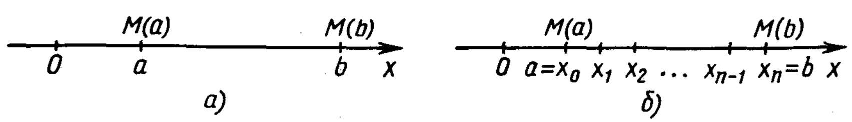
Сапраўды, кожная плоскасць, якая перпендыкулярная восі $Ox$ і перасякае адрэзак $[a;\ b]$ гэтай восі ў пункце $x$, дае ў сячэнні з целам круг радыуса $f(x)$ і плошчы $S(x)=\pi f^2(x)$ (рыс. 128, *б*). Адсюль па формуле (1) атрымліваецца формула (2). ●

**2. Работа пераменнай сілы.** Разгледзім матэрыяльны пункт, які рухаецца пад дзеяннем сілы $P$ па прамой. Калі дзеючая сіла пастаянная і накіравана ўздоўж прамой, а перамяшчэнне роўна $s$, то, як вядома з фізікі, работа $A$ гэтай сілы роўна здабытку $Ps$. Цяпер выведзем формулу для падліку работы, якая выконваецца пераменнай сілай.

Няхай пункт рухаецца па восі $Ox$ пад дзеяннем сілы, праекцыя якой на вось $Ox$ ёсць функцыя $f$ ад $x$. Пры гэтым мы будзем дапускаць, што $f$ ёсць непарарыўная функцыя. Пад дзеяннем гэтай сілы матэрыяльны пункт перамясціўся з пункта $M(a)$ у пункт $M(b)$ (рыс. 129, *а*). Пакажам, што ў гэтым выпадку работа $A$ падлічваецца па формуле

$$A=\int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Разаб'ём адрэзак $[a;\ b]$ на $n$ адрэзкаў аднолькавай даўжыні $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Гэта адрэзкі $[a;\ x_1]$, $[x_1;\ x_2]$, ..., $[x_{n-1};\ b]$ (рыс. 129, *б*). Работа сілы на ўсім адрэзку $[a;\ b]$ роўна суме работ гэтай сілы на атрыманых адрэзках. Паколькі $f$ ёсць непарарыўная функцыя ад $x$, пры дастаткова малым адрэзку $[a;\ x_1]$ работа сілы на гэтым адрэзку прыбліжана роўна $f(a)(x_1-a)$ (мы не звяртаем увагі на тое, што $f$ на адрэзку мяняецца). Аналагічна работа сілы на другім адрэзку $[x_1;\ x_2]$ прыбліжана роўна $f(x_1)(x_2-x_1)$ і г. д., работа сілы на $n$-м адрэзку прыбліжана роўна $f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$.




Рыс. 129



Такім чынам, работа сілы на ўсім адрэзку $[a;\ b]$ прыбліжана роўна

$$A\approx A_n=f(a)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x=$$
$$=\frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right),$$

і дакладнасць прыбліжанай роўнасці тым вышэйшая, чым карацейшыя адрэзкі, на якія разбіты адрэзак $[a;\ b]$. Натуральна, што гэта прыбліжаная роўнасць пераходзіць у дакладную, калі лічыць, што $n\to\infty$:

$$A_n=\frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)\to A.$$

Паколькі $A_n$ пры $n\to\infty$ імкнецца да інтэграла разглядаемай функцыі ад $a$ да $b$ (гл. п. 30), формула (3) выведзена.

Прыклад 3. *Сіла пругкасці спружыны, расцягнутай на 5 см, роўна 3 Н. Якую работу трэба выканаць, каб расцягнуць спружыну на 5 см?*

Па закону Гука сіла $F$, якая расцягвае спружыну на велічыню $x$, вылічваецца па формуле $F=kx$, дзе $k$ — пастаянны каэфіцыент прапарцыянальнасці (рыс. 130), пункт $O$ адпавядае свабоднаму становішчу спружыны. З умоў задачы вынікае, што $3=k\cdot 0{,}05$. Такім чынам, $k=60$ і сіла $F=60x$, а па формуле (3)

$$A=\int_0^{0{,}05} 60x\,dx=30x^2\Big|_0^{0{,}05};\ A=0{,}075\ \text{Дж.}$$ ●

▽ **3. Цэнтр мас.** Пры знаходжанні цэнтра мас карыстаюцца наступнымі правіламі:

1) Каардыната $x'$ цэнтра мас сістэмы матэрыяльных пунктаў $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ з масамі $m_1$, $m_2$, ..., $m_n$, размешчаных на прамой у пунктах з каардынатамі $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, знаходзіцца па формуле

$$x'=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \qquad (4)$$

2) Пры вылічэнні каардынаты цэнтра мас можна любую частку фігуры замяніць на матэрыяльны пункт, змясціўшы яе ў цэнтр мас гэтай часткі, і прыпісаць ёй масу, роўную масе разглядаемай часткі фігуры.

○ Прыклад 4. Няхай уздоўж стрыжня — адрэзка $[a;\ b]$ восі $Ox$ — размеркавана маса шчыльнасцю $\rho(x)$, дзе $\rho(x)$ — непарарыўная функцыя. Пакажам, што:




Рыс. 130

а) сумарная маса $M$ стрыжня роўна $\int_a^b \rho(x)dx$;

б) каардыната цэнтра мас $x'$ роўна $\frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$.

Разаб'ём адрэзак $[a;\ b]$ на $n$ роўных частак пунктамі $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (гл. рыс. 129, *б*). На кожным з $n$ гэтых адрэзкаў шчыльнасць можна лічыць пры вялікіх $n$ пастаяннай і прыкладна роўнай $\rho(x_{k-1})$ на $k$-м адрэзку (з прычыны неперарыўнасці $\rho(x)$). Тады маса $k$-га адрэзка прыкладна роўна $m_k = \frac{b-a}{n}\rho(x_{k-1})$, а маса ўсяго стрыжня роўна $\frac{b-a}{n}(\rho(x_0)+\rho(x_1)+\dots+\rho(x_{n+1}))$. Лічачы кожны з $n$ маленькіх адрэзкаў матэрыяльным пунктам масы $m_k$, змешчанай у пункце $x_{k-1}$, атрымаем па формуле (4), што каардыната цэнтра мас прыбліжана знаходзіцца так:

$$x'_n = \frac{\frac{b-a}{n}(x_0\rho(x_0)+x_1\rho(x_1)+\dots+x_{n-1}\rho(x_{n-1}))}{\frac{b-a}{n}(\rho(x_0)+\rho(x_1)+\dots+\rho(x_{n-1}))}.$$

Цяпер засталося заўважыць, што пры $n\to\infty$ лічнік імкнецца да інтэграла $\int_a^b x\rho(x)dx$, а назоўнік (які выражае масу ўсяго стрыжня) — да інтэграла $\int_a^b \rho(x)dx$.

Для знаходжання каардынат цэнтра мас сістэмы матэрыяльных пунктаў на плоскасці або ў прасторы таксама карыстаюцца формулай (4).● ▲

### *Практыкаванні*

**370.** Знайдзіце аб'ём цела, атрыманага пры вярчэнні вакол восі абсцыс крывалінейнай трапецыі, якая абмежавана лініямі:
а) $y = x^2+1,\ x=0,\ x=1,\ y=0$;
б) $y=\sqrt{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0$;
в) $y=\sqrt{x},\ x=1,\ y=0$;
г) $y=1-x^2,\ y=0$.

**371.** Знайдзіце аб'ём цела, атрыманага пры вярчэнні вакол восі абсцыс фігуры, якая абмежавана лініямі:
а) $y=x^2,\ y=x$; б) $y=2x,\ y=x+3,\ x=0,\ x=1$;
в) $y=x+2,\ y=1,\ x=0,\ x=2$; г) $y=\sqrt{x},\ y=x$.

**372.** а) Выведзіце формулу аб'ёму шаравога сегмента радыуса $R$ і вышыні $H$.



б) Выведзіце формулу аб'ёму ўсечанага конуса вышынёй $H$ з радыусамі асноў $R$ і $r$.

**373.** Якую работу трэба затраціць на сцісканне спружыны на 4 см, калі вядома, што сіла ў 2 Н сціскае гэту спружыну на 1 см?

**374.** Сіла ў 4 Н расцягвае спружыну на 8 см. Якую работу трэба выканаць, каб расцягнуць спружыну на 8 см?

---

**375.** Пад дзеяннем электрычнага зараду велічынёй $q$ электрон перамяшчаецца па прамой з адлегласці $a$ да адлегласці $b$. Знайдзіце работу сілы ўзаемадзеяння зарадаў. (Разгледзьце два выпадкі: 1) $a<b,\ q<0$; 2) $b<a,\ q>0$. Каэфіцыент прапарцыянальнасці ў формуле, якая выражае закон Кулона, лічыце роўным $\gamma$.)

**376.** Канал мае ў разрэзе форму раўнабокай трапецыі вышынёй $h$ з асновамі $a$ і $b$. Знайдзіце сілу, з якою вада, што запаўняе канал, цісне на плаціну ($a>b$, $a$ — верхняя аснова трапецыі).

**377.** Вада, якая падаецца з плоскасці асновы ў цыліндрычны бак праз адтуліну ў дне, запаўняе ўвесь бак. Вызначце затрачаную пры гэтым работу. Вышыня бака роўна $h$, радыус асновы роўны $r$.

**378.** Знайдзіце работу супраць сілы выштурхвання пры апусканні шара ў ваду.

**379.** Аднародны стрыжань даўжынёй $l = 20$ см верціцца ў гарызантальнай плоскасці вакол вертыкальнай восі, якая праходзіць праз яго канец. Вуглавая скорасць вярчэння $\omega = 10\pi\ с^{-1}$. Плошча папярочнага сячэння стрыжня $S = 4\ см^2$, шчыльнасць матэрыялу, з якога выраблен стрыжань, роўна $\rho = 7{,}8\ г/см^3$. Знайдзіце кінетычную энергію стрыжня.

**380.** Знайдзіце цэнтр мас аднароднага прамога кругавога конуса.

## ЗВЕСТКІ З ГІСТОРЫІ

**1. Аб паходжанні тэрмінаў і абазначэнняў.** Гісторыя паняцця інтэграла цесна звязана з задачамі знаходжання квадратур. *Задачамі аб квадратуры* той ці іншай плоскай фігуры матэматыкі Старажытнай Грэцыі і Рыма называлі задачы, якія мы зараз адносім да *задач на вылічэнне плошчаў*. Лацінскае слова quadratura перакладаецца як «наданне квадратнай формы». Неабходнасць у спецыяльным тэрміне тлумачыцца тым, што ў антычны час (і пазней, аж да XVIII стагоддзя) яшчэ не былі дастаткова развіты прывычныя для нас уяўленні аб сапраўдных ліках. Матэматыкі аперыравалі з іх геаметрычнымі аналагамі або скалярнымі велічынямі, якія нельга перамнажаць. Таму і задачы на знаходжанне плошчаў даводзілася фармуляваць, напрыклад, так: «Пабудаваць квадрат, роўнавялікі дадзенаму

кругу». (Гэта класічная задача «аб квадратуры круга» не можа, як вядома, быць рэшана з дапамогай цыркуля і лінейкі.)

Сімвал $\int$ уведзены Лейбніцам (1675 г.). Гэты знак з'яўляецца змяненнем лацінскай літары $S$ (першай літары слова summa). Само слова *інтэграл* прыдумаў Я. Бернулі (1690 г.). Магчыма, яно паходзіць ад лацінскага integro, якое перакладаецца як *прыводзіць у ранейшы стан, аднаўляць*. (Сапраўды, аперацыя інтэгравання «аднаўляе» функцыю, дыферэнцыраваннем якой атрымана падынтэгральная функцыя.) Магчыма, паходжанне тэрміна *інтэграл* іншае: слова integer азначае цэлы.

У ходзе перапіскі І. Бернулі і Г. Лейбніц згадзіліся з прапановай Я. Бернулі. Тады ж, у 1696 г., з'явілася і назва новай галіны матэматыкі — *інтэгральнае злічэнне* (calculus integralis), якую ўвёў І. Бернулі.

Іншыя вядомыя вам тэрміны, якія адносяцца да інтэгральнага злічэння, з'явіліся значна пазней. Назва *першавобразная функцыя*, якая скарыстоўваецца цяпер, замяніла больш раннюю «прымітыўную функцыю», якую ўвёў Лагранж (1797 г.). Лацінскае слова primitivus перакладаецца як «пачатковы»: $F(x)=\int f(x)dx$ — пачатковая (або першапачатковая, або першавобразная) для $f(x)$, якая атрымліваецца з $F(x)$ дыферэнцыраваннем.

У сучаснай літаратуры мноства ўсіх першавобразных для функцыі $f(x)$ называецца таксама *неазначальным інтэгралам*. Гэта паняцце вылучыў Лейбніц, які заўважыў, што ўсе першавобразныя функцыі адрозніваюцца на адвольную пастаянную. А $\int_a^b f(x)dx$ называюць *азначальным інтэгралам* (абазначэнне ўвёў К. Фур'е (1768—1830), але межы інтэгравання ўказваў ужо Эйлер).

**2. З гісторыі інтэгральнага злічэння.** Многія значныя дасягненні матэматыкаў Старажытнай Грэцыі ў рашэнні задач на знаходжанне *квадратур* (г. зн. вылічэнне плошчаў) плоскіх фігур, а таксама *кубатур* (вылічэнне аб'ёмаў) цел звязаны з прымяненнем *метаду вычэрпвання*, які быў прапанаваны Еўдоксам Кнідскім (каля 408 — каля 355 гг. да н. э.). З дапамогай гэтага метаду Еўдокс даказаў, напрыклад, што плошчы двух кругоў адносяцца як квадраты іх дыяметраў, а аб'ём конуса роўны $\frac{1}{3}$ аб'ёма цыліндра, які мае такія ж аснову і вышыню.

Метад Еўдокса быў удасканалены Архімедам. З гэтай мадыфікацыяй вы знаёмы: вывад формулы плошчы круга, прапанаваны ў курсе геаметрыі, заснаваны на ідэях Архімеда. Напомнім асноўныя этапы, якія характарызуюць метад Архімеда: 1) даказваецца, што плошча круга меншая за плошчу любога апісанага каля яго правільнага многавугольніка, але большая за плошчу любога ўпісанага; 2) даказваецца, што пры неабмежаваным падваенні ліку старон рознасць плошчаў гэтых многавугольнікаў імкнецца да



**Архімед**

**(каля 287—212 да н.э.) —**

**вялікі вучоны. Першаадкрывальнік многіх фактараў і метадаў матэматыкі і механікі, выдатны інжынер. Глыбокія і трапныя ідэі Архімеда, звязаныя з вылічэннем плошчаў і аб'ёмаў, рашэннем задач механікі, па сутнасці, прадугадваюць адкрыццё матэматычнага аналізу, зробленае амаль 2000 гадоў пасля.**



нуля; 3) для вылічэння плошчы круга застаецца знайсці значэнне, да якога імкнецца адносіна плошчы правільнага многавугольніка пры неабмежаваным падваенні яго старон.

З дапамогай метаду вычэрпвання, цэлага рада іншых трапных меркаванняў (у тым ліку з прыцягненнем мадэлей механікі) Архімед рашыў многія задачы. Ён даў ацэнку ліку $\pi \left(3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}\right)$, знайшоў аб'ёмы шара і эліпсоіда, плошчу сегмента парабалы і г. д. Сам Архімед высока цаніў гэтыя рэзультаты: згодна з яго жаданнем на магіле Архімеда высечаны шар, упісаны ў цыліндр. (Архімед паказаў, што аб'ём такога шара роўны $\frac{2}{3}$ аб'ёму цыліндра.)

Архімед прадугадаў многія ідэі інтэгральнага злічэння. (Трэба дадаць, што і першыя тэарэмы аб граніцах былі даказаны ім.) Але спатрэбілася больш за паўтары тысячы гадоў, перш чым гэтыя ідэі знайшлі дакладнае адлюстраванне і былі даведзены да ўзроўню злічэння.

Матэматыкі XVII стагоддзя, якія атрымалі многія новыя рэзультаты, вучыліся на працах Архімеда. Актыўна прымяняўся і іншы метад — *метад непадзельных*, які таксама зарадзіўся ў Старажытнай Грэцыі (ён звязаны ў першую чаргу з атамістычнымі перакананнямі Дэмакрыта). Напрыклад, крывалінейную трапецыю (рыс. 131, *а*) яны ўяўлялі сабе складзенай з вертыкальных адрэзкаў даўжынёй $f(x)$, якім тым не менш прыпісвалі плошчу, роўную *бесканечна малой велічыні* $f(x)dx$. У адпаведнасці з такім разуменнем шукаемая плошча лічылася роўнай суме

$$S=\sum_{a<x<b} f(x)dx$$



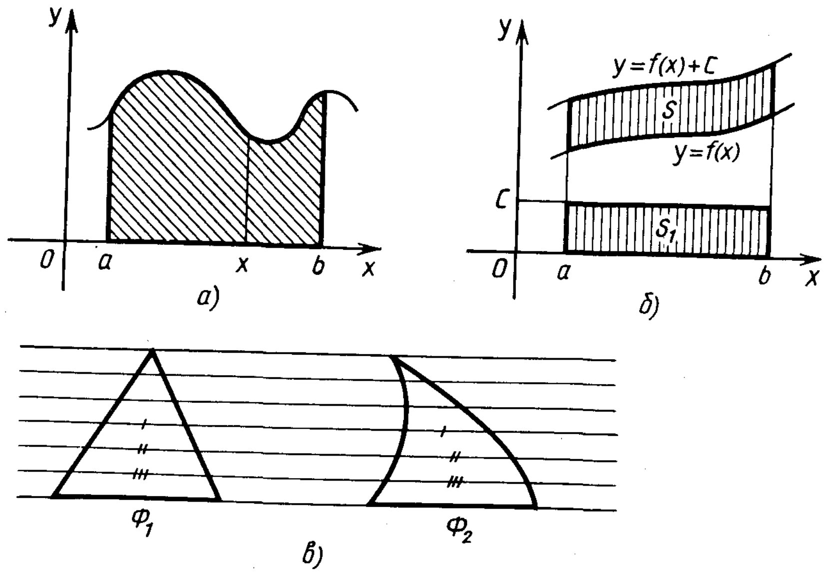
Рыман Георг Фрыдрых Бернхард

(1826—1866) —

нямецкі вучоны, адзін з найбуйнейшых матэматыкаў XIX стагоддзя. Зрабіў выдатныя адкрыцці ў тэорыі лікаў і тэорыі функцый комплекснага пераменнага. Залажыў асновы новай нееўклідавай геаметрыі, якая атрымала назву рыманавай. Стварыў тэорыю інтэграла, якая абагульняе вынікі Кашы.

бесканечна вялікага ліку бесканечна малых плошчаў. Часам нават падкрэслівалася, што асобныя складаемыя ў гэтай суме — нулі, але нулі асобага роду, якія, складзеныя ў бесканечным ліку, даюць зусім пэўную дадатную суму.

На такой аснове, якая цяпер па меншай меры здаецца няпэўнай, І. Кеплер (1571—1630) у сваіх сачыненнях «Новая




Рыс. 131



Чабышоў Пафнуцій Львовіч

(1821—1894) —

рускі матэматык і механік. Яго даследаванні, якія атрымалі прызнанне, адносяцца да тэорыі прыбліжэння функцый мнагачленамі («мнагачлены Чабышова» найлепшага прыбліжэння), інтэгральнага злічэння, тэорыі імавернасцей, тэорыі механізмаў.



астраномія» (1609 г.) і «Стэрэаметрыя вінных бочак» (1615 г.) правільна вылічыў рад плошчаў (напрыклад, плошчу фігуры, абмежаванай эліпсам) і аб'ёмаў (цела разразалася на бесканечна тонкія пласцінкі). Гэтыя даследаванні былі працягнуты італьянскімі матэматыкамі Б. Кавальеры (1598—1647) і Э. Тарычэлі (1608—1647). Захоўвае сваё значэнне і ў наш час сфармуляваны Б. Кавальеры прынцып, уведзены ім пры некаторых дадатковых прапановах.

Няхай трэба знайсці плошчу фігуры, паказанай на рысунку 131, *б*, дзе крывыя, якія абмяжоўваюць фігуру зверху і знізу, маюць ураўненні $y=f(x)$ і $y=f(x)+c$.

Уяўляючы нашу фігуру складзенай з «непадзельных», па тэрміналогіі Кавальеры, бесканечна тонкіх слупкоў, заўважаем, што ўсе яны маюць агульную даўжыню $c$. Перасоўваючы іх у вертыкальным напрамку, мы можам скласці з іх прамавугольнік з асновай $b-a$ і вышынёй $c$. Таму шукаемая плошча роўна плошчы атрыманага прамавугольніка, г. зн.

$$S=S_1=c(b-a).$$

Агульны прынцып Кавальеры для плошчаў плоскіх фігур фармулюецца так: *Няхай прамыя некаторага пучка паралельных перасякаюць фігуры* $\Phi_1$ *і* $\Phi_2$ *па адрэзках роўнай даўжыні* (рыс. 131, *в*). *Тады плошчы фігур* $\Phi_1$ *і* $\Phi_2$ *роўныя.* (У духу разважанняў матэматыкаў XVII ст. мы прапускаем агаворкі, без якіх гэта сцверджанне не зусім правільнае.)

Аналагічны прынцып дзейнічае ў стэрэаметрыі і аказваецца карысным пры знаходжанні аб'ёмаў. Найпрасцейшыя вынікі прынцыпу Кавальеры вы можаце вывесці самі. Дакажыце, напрыклад, што прамы і нахілены цыліндры з агульнай асновай і вышынёй маюць роўныя аб'ёмы.

У XVII ст. былі зроблены многія адкрыцці, якія адносяцца да інтэгральнага злічэння. Напрыклад, П. Ферма ўжо ў 1629 г. рашыў задачу квадратуры любой крывой $y=x^n$, дзе $n$ — цэлы (г. зн. па сутнасці вывеў формулу $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$), і на гэтай аснове рашыў рад задач на знаходжанне цэнтраў цяжару. І. Кеплер пры вывадзе сваіх славутых законаў руху планет фактычна абапіраўся на ідэю прыбліжанага інтэгравання. І. Бароу (1630—1677), настаўнік Ньютана, блізка падышоў да разумення сувязі інтэгравання і дыферэнцыравання. Вялікае значэнне мелі работы па запісу функцый у выглядзе ступенных радоў.

Аднак пры ўсёй значнасці рэзультатаў, атрыманых многімі надзвычай вынаходлівымі матэматыкамі XVII ст., злічэння яшчэ не было. Неабходна было вылучыць агульныя ідэі, якія ляжаць у аснове рашэння многіх прыватных задач, а таксама ўстанавіць сувязь аперацый дыферэнцыравання і інтэгравання, якая дае дастаткова агульны алгарытм. Гэта зрабілі Ньютан і Лейбніц, якія адкрылі незалежна адзін ад аднаго факт, вядомы вам пад назвай формулы Ньютана — Лейбніца. Тым самым канчаткова аформіўся агульны метад. Трэба было яшчэ навучыцца знаходзіць першавобразныя многіх функцый, даць лагічныя асновы новага злічэння і да т. п. Але галоўнае ўжо было зроблена: дыферэнцыяльнае і інтэгральнае злічэнне створана.

Метады матэматычнага аналізу актыўна развіваліся ў наступным стагоддзі (у першую чаргу трэба назваць імёны Л. Эйлера, які закончыў сістэматычнае даследаванне інтэгравання элементарных функцый, і І. Бернулі). У развіцці інтэгральнага злічэння прынялі ўдзел рускія матэматыкі М. В. Астраградскі (1801—1862), В. Я. Бупякоўскі (1804—1889), П. Л. Чабышоў (1821—1894). Прынцыповае значэнне мелі, у прыватнасці, рэзультаты Чабышова, які даказаў, што існуюць інтэгралы, якія не выражаюцца праз элементарныя функцыі.

Строгае выкладанне тэорыі інтэграла з'явілася толькі ў мінулым стагоддзі. Рашэнне гэтай задачы звязана з імёнамі А. Кашы, аднаго з найбуйнейшых матэматыкаў, нямецкага вучонага Б. Рымана (1826—1866), французскага матэматыка Г. Дарбу (1842—1917).

Адказы на многія пытанні, звязаныя з існаваннем плошчаў і аб'ёмаў фігур, былі атрыманы са стварэннем К. Жарданам (1838—1922) тэорыі меры.

Розныя абагульненні паняцця інтэграла ўжо ў пачатку нашага стагоддзя былі прапанаваны французскімі матэматыкамі А. Лябегам (1875—1941) і А. Данжуа (1884—1974), савецкім матэматыкам А. Я. Хінчыным (1894—1959).



**Лябег Анры Леон**

**(1875—1941) —**

**французскі матэматык. Стваральнік тэорыі меры (абагульненне паняццяў плошчы і аб'ёму), на аснове якой распрацаваў новую тэорыю інтэграла.**



## *Пытанні і задачы на паўтарэнне*

**1.** 1) Сфармулюйце азначэнне першавобразнай.

2) Дакажыце, што функцыя $F$ з'яўляецца першавобразнай для функцыі $f$ на $\boldsymbol{R}$:

а) $f(x)=2x+3,\ F(x)=x^2+3x+1$;

б) $f(x)=\sin 2x+3,\ F(x)=-\frac{\cos 2x}{2}+3x$;

в) $f(x)=-x^3+5,\ F(x)=-\frac{x^4}{4}+5x+2$;

г) $f(x)=-\cos\frac{x}{2}+1,\ F(x)=-2\sin\frac{x}{2}+x$.

3) Ці з'яўляецца функцыя $F$ першавобразнай для функцыі $f$ на зададзеным прамежку:

а) $F(x)=x^2-x,\ f(x)=2x-1$ на $\boldsymbol{R}$;

б) $F(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x,\ f(x)=-\frac{1}{x^3}-\cos x$ на $\boldsymbol{R}$;

в) $F(x)=x^3+1,\ f(x)=\frac{x^4}{4}+x$ на $\boldsymbol{R}$;

г) $F(x)=x+\cos x,\ f(x)=1-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$?

**2.** 1) Сфармулюйце прызнак пастаянства функцыі на зададзеным прамежку. Сфармулюйце асноўную ўласцівасць першавобразнай.

2) Запішыце агульны выгляд першавобразных для функцыі:

а) $f(x)=kx+b$ ($k$ і $b$ — пастаянныя); б) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$;

в) $f(x)=x^n$ ($n$ — цэлы лік, $n\neq-1$); г) $f(x)=\cos x$.

3) Для функцыі $f$ знайдзіце першаабразную $F$, якая прымае зададзенае значэнне ў дадзеным пункце:

а) $f(x)=\sin x-\cos x$, $F(\pi)=1$; б) $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$, $F(3)=5$;

в) $f(x)=2x-5$, $F(1)=-2$; г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, $F(6)=10$.

**3.** 1) Сфармулюйце тры правілы знаходжання першаабразных.

2) Знайдзіце агульны выгляд першаабразных для функцыі:

а) $f(x)=\sin 3x-\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}$; б) $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $f(x)=(4-5x)^3-\frac{1}{(2x-1)^3}$; г) $f(x)=x-10\cos 2x$.

3) Для функцыі $f$ знайдзіце першаабразную, графік якой праходзіць праз пункт $M$:

а) $f(x)=(2-3x)^2$, $M(1;\ 2)$; б) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ -2\right)$;

в) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{4};\ 2\right)$; г) $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $M(0;\ 3)$.

**4.** 1) Якую фігуру называюць крывалінейнай трапецыяй? Запішыце формулу для вылічэння плошчы крывалінейнай трапецыі.

2) Прывядзіце прыклады крывалінейных трапецый.

3) Начарціце крывалінейную трапецыю, абмежаваную дадзенымі лініямі, і знайдзіце яе плошчу:

а) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$;

б) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-2$;

в) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=3$;

г) $y=3-2x-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$.

**5.** 1) Растлумачце, што такое інтэграл.

2) Запішыце формулу Ньютана — Лейбніца. Вылічыце інтэграл:

а) $\int_{-3}^{3}\frac{dx}{(x+10)^2}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx$; г) $\int_{0}^{3}x^2dx$.

3) Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі:

а) $y=x^2$, $y=3x$; б) $y=x^2-4x+6$, $y=1$, $x=1$, $x=3$;

в) $y=4-x^2$, $y=3$; г) $y=\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.





# ПАКАЗАЛЬНАЯ І ЛАГАРЫФМІЧНАЯ ФУНКЦЫІ

## § 9. АБАГУЛЬНЕННЕ ПАНЯЦЦЯ СТУПЕНІ

### 32. Корань $n$-й ступені і яго ўласцівасці

**1. Азначэнне кораня.** З паняццем квадратнага кораня з ліку $a$ вы ўжо знаёмы: гэта такі лік, квадрат якога роўны $a$. Аналагічна вызначаецца корань $n$-й ступені з ліку $a$, дзе $n$ — адвольны натуральны лік.

Азначэнне. ***Коранем n-й ступені з ліку a* называецца такі лік, *n*-я ступень якога роўна *a*.**

○ Прыклад 1. Корань трэцяй ступені з ліку 27 роўны 3, таму што $3^3=27$. Лікі 2 і $-2$ з'яўляюцца каранямі шостай ступені з ліку 64, паколькі $2^6=64$ і $(-2)^6=64$. ●

Згодна з дадзеным азначэннем корань $n$-й ступені з ліку $a$ — гэта рашэнне ўраўнення $x^n=a$. Лік каранёў гэтага ўраўнення залежыць ад $n$ і $a$. Разгледзім функцыю $f(x)=x^n$. Як вядома, на прамежку $[0;\ \infty)$ гэта функцыя пры любым $n$ узрастае і прымае ўсе значэнні з прамежку $[0;\ \infty)$. Па тэарэме аб корані (п. 8) ураўненне $x^n=a$ для любога $a\in[0;\ \infty)$ мае неадмоўны корань і прытым толькі адзін. Яго называюць *арыфметычным коранем n-й ступені з ліку a* і абазначаюць $\sqrt[n]{a}$; лік $n$ называюць *паказчыкам кораня*, а сам лік $a$ — *падкарэнным выразам*. Знак кораня $\sqrt{\ }$ называюць таксама *радыкалам*.

Азначэнне. ***Арыфметычным коранем n-й ступені з ліку a* называюць неадмоўны лік, *n*-я ступень якога роўна *a*.**

○ Прыклад 2. Знойдзем значэнне: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

а) $\sqrt[3]{8}=2$, паколькі $2^3=8$ і $2>0$;

б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$, паколькі $\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$ і $\frac{3}{2}>0$. ●

Пры цотных $n$ функцыя $f(x)=x^n$ цотная. Адсюль вынікае, што калі $a>0$, то ўраўненне $x^n=a$, акрамя кораня $x_1=\sqrt[n]{a}$, мае таксама корань $x_2=-\sqrt[n]{a}$. Калі $a=0$, то корань адзін: $x=0$; калі $a<0$, то гэта ўраўненне каранёў не мае, паколькі цотная ступень любога ліку неадмоўная.

Такім чынам, пры цотным $n$ існуюць два карані $n$-й ступені з любога дадатнага ліку $a$; корань $n$-й ступені з ліку 0 роўны нулю; каранёў цотнай ступені з адмоўных лікаў не існуе.

○ Прыклад 3. Ураўненне $x^4=81$ мае два карані: гэта лікі 3 і $-3$. Такім чынам, існуе два карані чацвёртай ступені з 81. Пры гэтым $\sqrt[4]{81}$ — гэта неадмоўны лік, г. зн. $\sqrt[4]{81}=3$, а $-3=-\sqrt[4]{81}$.

Прыклад 4. Дадатным коранем ураўнення $x^4=3$ з'яўляецца лік $\sqrt[4]{3}$. Гэты лік (таксама, між іншым, як і лік $-\sqrt[4]{3}$) ірацыянальны. Яго дзесятковыя знакі можна вылічыць паслядоўна:

$$1<\sqrt[4]{3}<2, \text{ паколькі } 1^4<3<2^4;$$

$$1{,}3<\sqrt[4]{3}<1{,}4, \text{ паколькі } 1{,}3^4<3<1{,}4^4 \text{ і г. д.}$$

(пераканайцеся, што $\sqrt[4]{3}=1{,}31607...$). ●

Пры няцотных значэннях $n$ функцыя $f(x)=x^n$ узрастае па ўсёй лікавай прамой; яе вобласць значэнняў — мноства ўсіх сапраўдных лікаў. Прымяняючы тэарэму аб корані, знаходзім, што ўраўненне $x^n=a$ мае адзін корань пры любым $a$ і, у прыватнасці, пры $a<0$. Гэты корань для любога значэння $a$ (у тым ліку і $a$ адмоўнага) абазначаюць $\sqrt[n]{a}$.

Такім чынам, *пры няцотным $n$ існуе корань $n$-й ступені з любога ліку $a$ і прытым толькі адзін.*

Для каранёў няцотнай ступені справядлівая роўнасць

$$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$$

Сапраўды,

$$(-\sqrt[n]{a})^n=(-1)^n\cdot(\sqrt[n]{a})^n=-1\cdot a=-a,$$

г. зн. лік $-\sqrt[n]{a}$ ёсць корань $n$-й ступені з $-a$. Але такі корань пры няцотным $n$ адзіны. Значыць, $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

Роўнасць $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ (пры няцотным $n$) дазваляе выразіць корань няцотнай ступені з адмоўнага ліку праз арыфметычны корань той жа ступені. Напрыклад, $\sqrt[5]{-71}=-\sqrt[5]{71}$, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$.

Заўвага 1. Для любога сапраўднага $x$

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x|, & \text{калі } n \text{ цотны;}\\ x, & \text{калі } n \text{ няцотны.}\end{cases}$$

(Дакажыце гэту ўласцівасць самастойна.)

Заўвага 2. Зручна лічыць, што корань першай ступені з ліку $a$ роўны $a$. Як вы ўжо ведаеце, корань другой ступені з ліку называюць *квадратным коранем*, а паказчык 2 кораня пры запісе прапускаюць (напрыклад, корань квадратны з 7 абазначаюць проста $\sqrt{7}$). Корань трэцяй ступені называюць *кубічным коранем*.

○ Прыклад 5. Рэшым ураўненне: а) $x^5=-11$; б) $x^8=7$.

а) Па азначэнню кораня $n$-й ступені лік $x$ — корань пятай ступені з $-11$. Паказчык кораня — няцотны лік 5, таму такі



корань існуе і прытым толькі адзін: гэта $\sqrt[5]{-11}$. Такім чынам, $x=-\sqrt[5]{11}$.

б) Па азначэнню кораня $n$-й ступені рашэннем ураўнення $x^8=7$ з'яўляецца лік $\sqrt[8]{7}$. Паколькі 8 — лік цотны, $-\sqrt[8]{7}$ таксама з'яўляецца рашэннем дадзенага ўраўнення. Такім чынам, $x_1=\sqrt[8]{7}$, $x_2=-\sqrt[8]{7}$. Адказ можна запісаць так: $x=\pm\sqrt[8]{7}$. ●

**2. Асноўныя ўласцівасці каранёў.** Напомнім вядомыя вам уласцівасці арыфметычных каранёў $n$-й ступені.

*Для любога натуральнага $n$, цэлага $k$ і любых неадмоўных лікаў $a$ і $b$ выкананы роўнасці:*

1°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$.

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$.

4°. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$.

5°. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (калі $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

Дакажам уласцівасць 1°. Па азначэнню $\sqrt[n]{ab}$ — гэта такі неадмоўны лік, $n$-я ступень якога роўна $ab$. Лік $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ неадмоўны. Таму дастаткова праверыць справядлівасць роўнасці $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=ab$, якая вынікае з уласцівасцей ступені з натуральным паказчыкам і азначэння кораня $n$-й ступені: $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab$.

Аналагічна даказваюцца наступныя тры ўласцівасці:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\geqslant 0 \text{ і } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b};\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\geqslant 0 \text{ і } (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk}=$$

$$=((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k=(\sqrt[k]{a})^k=a;\ \sqrt[n]{a}\geqslant 0 \text{ і } (\sqrt[n]{a})^{nk}=((\sqrt[n]{a})^n)^k=a^k.$$

Дакажам цяпер уласцівасць 5°. Заўважым, што $n$-я ступень ліку $(\sqrt[n]{a})^k$ роўна $a^k$:

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n=(\sqrt[n]{a})^{kn}=((\sqrt[n]{a})^n)^k=a^k.$$

Па азначэнню арыфметычнага кораня $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$ (таму што $(\sqrt[n]{a})^k\geqslant 0$).

Прывядзём прыклады прымянення ўласцівасцей 1°—5° да рашэння задач на пераўтварэнне лікавых выразаў, якія змяшчаюць карані.

○ Прыклад 6. Пераўтворым выразы: а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$.

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=2$ (уласцівасць 1°);

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$ (уласцівасць 2°);

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$ (уласцівасць 3°);

г) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$ (уласцівасць 4°);

д) прымяняючы ўласцівасць 5°, знаходзім $\sqrt[7]{128^3}=(\sqrt[7]{128})^3=2^3=8$.

Дакажам нуступную ўласцівасць арыфметычнага кораня:

6°. *Для любых лікаў* $a$ *і* $b$, *такіх, што* $0\leqslant a<b$, *выконваецца няроўнасць* $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

Правядзём доказ метадам ад процілеглага. Дапусцім, што $\sqrt[n]{a}\geqslant\sqrt[n]{b}$. Тады па ўласцівасці ступеней з натуральным паказчыкам $(\sqrt[n]{a})^n\geqslant(\sqrt[n]{b})^n$, г. зн. $a\geqslant b$. Гэта супярэчыць умове $a<b$.

Прыклад 7. Параўнаем лікі $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$.

Уявім $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$ у выглядзе каранёў з адным і тым жа паказчыкам: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{32}$, а $\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{3^3}=\sqrt[15]{27}$ (уласцівасць 4°). З няроўнасці $32>27$ па ўласцівасці 6° вынікае, што $\sqrt[15]{32}>\sqrt[15]{27}$, і, значыць, $\sqrt[3]{2}>\sqrt[5]{3}$.

Прыклад 8. Рэшым няроўнасць $x^6>20$.

Гэта няроўнасць раўназначная няроўнасці $x^6-20>0$. Паколькі функцыя $f(x)=x^6-20$ неперарыўная, можна скарыстаць метад інтэрвалаў. Ураўненне $x^6-20=0$ мае два карані: $\sqrt[6]{20}$ і $-\sqrt[6]{20}$. Гэтыя лікі разбіваюць лікавую прамую на тры прамежкі. Рашэнне дадзенай няроўнасці — аб'яднанне дзвюх з іх: $(-\infty;\ -\sqrt[6]{20})$ і $(\sqrt[6]{20};\ \infty)$.

### *Практыкаванні*

Праверце справядлівасць роўнасцей (381—382).

**381.** а) $\sqrt[4]{16}=2$; б) $\sqrt[7]{-1}=-1$; в) $\sqrt[10]{1024}=2$; г) $\sqrt[5]{-243}=-3$.

**382.** а) $\sqrt[17]{1}=1$; б) $\sqrt[6]{64}=2$; в) $\sqrt[3]{-343}=-7$; г) $\sqrt[19]{0}=0$.

Вылічыце (383—384).

**383.** а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[3]{64}$.

**384.** а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$.



Рашыце ўраўненні (385—388).

**385.** а) $x^3+4=0$; б) $x^6=5$; в) $x^3=4$; г) $x^4=10$.

**386.** а) $x^{10}-15=0$; б) $x^7+128=0$; в) $x^6-64=0$; г) $x^5=3$.

**387.** а) $16x^4-1=0$; б) $0{,}01x^3+10=0$; в) $0{,}02x^6-1{,}28=0$; г) $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$.

**388.** а) $\sqrt[3]{x}=-0{,}6$; б) $\sqrt[4]{x}=3$; в) $\sqrt{x}=5$; г) $\sqrt[7]{x}=-1$.

Знайдзіце значэнне лікавага выразу (389—394).

**389.** а) $(-\sqrt[4]{11})^4$; б) $(2\sqrt[5]{-2})^5$; в) $(\sqrt[3]{7})^3$; г) $(-\sqrt[6]{2})^6$.

**390.** а) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{32\cdot 243}$; в) $\sqrt[3]{8\cdot 343}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot 16}$.

**391.** а) $\sqrt[5]{160\cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; в) $\sqrt[4]{48\cdot 27}$; г) $\sqrt[3]{75\cdot 45}$.

**392.** а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{9}$; б) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{-8}$; в) $\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; г) $\sqrt[3]{-25}\cdot\sqrt[6]{25}$.

**393.** а) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; г) $\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}$.

**394.** а) $\sqrt[6]{\frac{64}{100\,000\,000}}\cdot\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}:\sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$;

б) $\sqrt[5]{1\frac{11}{16}\cdot 4{,}5}-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$;

в) $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$; г) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$.

**395.** Знайдзіце першыя два дзесятковыя знакі (пасля коскі) ліку:

а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt[3]{3}$.

Карыстаючыся табліцамі або калькулятарам, знайдзіце прыбліжанае значэнне кораня з дакладнасцю да 0,01 (396—397).

**396.** а) $\sqrt[3]{10{,}17}$; б) $\sqrt{71}$; в) $\sqrt{13{,}21}$; г) $\sqrt[3]{11}$.

**397.** а) $\sqrt[9]{13{,}7}$; б) $\sqrt[6]{10}$; в) $\sqrt[4]{2{,}8}$; г) $\sqrt[8]{13}$.

Параўнайце лікі (398—401).

**398.** а) $\sqrt[5]{0{,}2}$ і 0; б) $\sqrt[12]{0{,}4}$ і $\sqrt[12]{\frac{5}{12}}$; в) $\sqrt[7]{1{,}8}$ і 1; г) $\sqrt[8]{0{,}2}$ і $\sqrt[8]{0{,}3}$.

**399.** а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ і $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[18]{\frac{3}{7}}$ і $\sqrt[18]{0{,}43}$; в) $\sqrt[5]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$; г) $\sqrt[10]{0{,}8}$ і 1.

**400.** а) $\sqrt{0{,}3}$ і $\sqrt[5]{0{,}05}$; б) $\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt[5]{8}$; в) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt[6]{40}$; г) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[8]{500}$.

**401.** а) $\sqrt[3]{-0{,}4}$ і $\sqrt[5]{-0{,}3}$; б) $\sqrt[5]{-5}$ і $\sqrt[3]{-3}$; в) $\sqrt[3]{-2}$ і $\sqrt[3]{-4}$; г) $\sqrt[3]{-5}$ і $\sqrt[5]{-3}$.

**402.** Вынесіце множнік за знак кораня ($a > 0$, $b > 0$):

а) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$; б) $\sqrt[5]{-128a^7}$; в) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6}$; г) $\sqrt[3]{54a^{10}}$.

**403.** Унясіце множнік пад знак кораня ($a > 0$, $b > 0$):

а) $-b\sqrt[4]{3}$; б) $ab\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}$; в) $a\sqrt[4]{7}$; г) $-ab\sqrt[3]{-4}$.

Пры якіх значэннях $a$ правільная роўнасць (404—405)?

**404.** а) $\sqrt{a^2} = -a$; б) $\sqrt[3]{a^3} = a$; в) $\sqrt[5]{a^5} = |a|$; г) $\sqrt[4]{a^4} = a$.

**405.** а) $\sqrt[3]{a^3} = -a$; б) $\sqrt[6]{a^6} = -a$; в) $\sqrt[4]{a^4} = |a|$; г) $\sqrt[7]{a^7} = a$.

Запішыце выраз у выглядзе дробу, назоўнік якога не змяшчае знака кораня (406—407).

**406.** а) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}-1}$.

**407.** а) $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{4}{x\sqrt[4]{4}}$; г) $\frac{5}{3\sqrt[5]{5}}$.

---

Прывядзіце лікавы выраз да выгляду $a\sqrt[n]{b}$, дзе $a$ — рацыянальны лік, а $b$ — натуральны (408—409).

**408.** а) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[5]{27\cdot 25}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$; г) $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}$.

**409.** а) $\sqrt[12]{25^3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{2}}$; в) $\sqrt[8]{\frac{16^3}{81}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}\sqrt[3]{5}}$.

**410.** Рашыце ўраўненне з дапамогай падстаноўкі $t = \sqrt[4]{x}$ або $t = \sqrt[6]{x}$:

а) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$; б) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$;

в) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; г) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$.

Рашыце няроўнасці (411—412).

**411.** а) $x^4 < 3$; б) $x^{11} \geqslant 7$; в) $x^{10} > 2$; г) $x^3 \leqslant 5$.

**412.** а) $\sqrt[3]{x} < -7$; б) $\sqrt[6]{x} \geqslant 2$; в) $\sqrt[3]{x} > 2$; г) $\sqrt[4]{x} \leqslant 3$.

Спрасціце выразы (413—414).

**413.** а) $\sqrt[6]{a^6}$, дзе $a \leqslant 0$; б) $\sqrt[4]{a^4}$, дзе $a \geqslant 0$; в) $\sqrt[5]{a^5}$; г) $\sqrt{a^2}$, дзе $a \geqslant 0$.

**414.** а) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$, дзе $a \leqslant 0$; б) $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7}$, дзе $a \geqslant 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[6]{a^6}$, дзе $a \geqslant 0$; г) $\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8}$, дзе $a \leqslant 0$.

**415.** Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}} + \sqrt{17}$;



в) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}}\cdot\sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$; г) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

**416.** Запішыце выраз у выглядзе дробу, назоўнік якога не змяшчае радыкала:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{2}{a-\sqrt[3]{b}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$; г) $\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

## 33. Ірацыянальныя ўраўненні

Ураўненні, у якіх пад знакам кораня змяшчаецца пераменная, называюць *ірацыянальнымі*. Такое, напрыклад, ураўненне $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$.

○ П р ы к л а д 1. Рэшым ураўненне $\sqrt{x^2-5} = 2$.

Увядзём абедзве часткі гэтага ўраўнення ў квадрат і атрымаем $x^2 - 5 = 4$, адкуль вынікае, што $x^2 = 9$, г. зн. $x = 3$ або $x = -3$.

Праверым, што атрыманыя лікі з'яўляюцца рашэннямі ўраўнення. Сапраўды, пры падстаноўцы іх у дадзенае ўраўненне атрымліваюцца правільныя роўнасці

$$\sqrt{3^2-5} = 2 \text{ і } \sqrt{(-3)^2-5} = 2.$$

Значыць, $x = 3$ і $x = -3$ — рашэнні дадзенага ўраўнення.

П р ы к л а д 2. Рэшым ураўненне $\sqrt{x} = x - 2$.

Узвёўшы ў квадрат абедзве часткі ўраўнення, атрымаем $x = x^2 - 4x + 4$. Пасля пераўтварэнняў прыходзім да квадратнага ўраўнення $x^2 - 5x + 4 = 0$, карані якога $x = 1$ і $x = 4$. Праверым, ці з'яўляюцца атрыманыя лікі рашэннямі дадзенага ўраўнення. Пры падстаноўцы ў яго ліку 4 атрымліваем правільную роўнасць $\sqrt{4} = 4 - 2$, г. зн. 4 — рашэнне дадзенага ўраўнення. Пры падстаноўцы ж ліку 1 атрымліваем у правай частцы $-1$, а ў левай частцы лік 1. Значыць, 1 не з'яўляецца рашэннем ураўнення; гавораць, што гэта *пабочны корань*, атрыманы ў выніку прынятага спосабу рашэння. А д к а з: $x = 4$. ●

Мы бачым, што пры рашэнні ірацыянальных ураўненняў атрыманыя рашэнні патрабуюць праверкі, таму, напрыклад, што няправільная роўнасць пры ўзвядзенні ў квадрат можа даць правільную роўнасць. Сапраўды, няправільная роўнасць $1 = -1$ пры ўзвядзенні ў квадрат дае правільную роўнасць $1^2 = (-1)^2$.

○ П р ы к л а д 3. Рэшым ураўненне $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x}$.

Узвядзём абедзве часткі гэтага ўраўнення ў квадрат: $x^2 - 2 = x$, адкуль атрымліваем ураўненне $x^2 - x - 2 = 0$, карані якога $x = -1$ і $x = 2$. Адразу зразумела, што лік $-1$ не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення, таму што абедзве часткі яго не вызначаны пры $x = -1$. Пры падстаноўцы ва ўраўненне ліку 2 атрымліваем правільную роўнасць $\sqrt{2^2-2} = \sqrt{2}$. Значыць, рашэннем дадзенага ўраўнення з'яўляецца толькі лік 2.

Прыклад 4. Рэшым ураўненне $\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}$.

Узводзячы ў квадрат абедзве часткі гэтага ўраўнення, атрымліваем $x-6=4-x$, $2x=10$, $x=5$. Падстаноўкай пераконваемся, што лік 5 не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення. Таму ўраўненне не мае рашэнняў. ○

Часам зручна рашаць ірацыянальныя ўраўненні, выкарыстоўваючы раўназначныя пераходы.

○ Прыклад 5. Рэшым ураўненне $\sqrt{x-2}=x-8$.

Па азначэнню $\sqrt{x-2}$ — гэта такі неадмоўны лік, квадрат якога роўны падкарэннаму выразу. Іншымі словамі, ураўненне $\sqrt{x-2}=x-8$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\geqslant 0. \end{cases}$$

Рашаючы першае ўраўненне сістэмы, раўназначнае ўраўненню $x^2-17x+66=0$, атрымаем карані 11 і 6, але ўмова $x-8\geqslant 0$ выконваецца толькі для $x=11$. Таму дадзенае ўраўненне мае адзін корань $x=11$.

Прыклад 6. Рэшым ураўненне $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$.

У адрозненне ад разгледжаных раней прыкладаў дадзенае ірацыянальнае ўраўненне змяшчае не квадратны корань, а корань трэцяй ступені. Таму для таго, каб «пазбавіцца ад радыкала», трэба ўзвесці абедзве часткі ўраўнення не ў квадрат, а ў куб: $(x-1)^3=x^2-x-1$. Пасля пераўтварэнняў атрымліваем:

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1,\ \ x^3-4x^2+4x=0,$$
$$x(x^2-4x+4)=0,\ \ x(x-2)^2=0.$$

Такім чынам, $x_1=0$, $x_2=2$.

Прыклад 7. Рэшым сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$$

Паклаўшы $u=\sqrt[3]{x}$ і $v=\sqrt[3]{y}$, прыходзім да сістэмы

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^3+v^3=28. \end{cases}$$

Раскладзём левую частку другога ўраўнення на множнікі: $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)$ — і падставім у яго з першага ўраўнення $u+v=4$. Тады атрымаем сістэму, раўназначную другой:

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^2-uv+v^2=7. \end{cases}$$

Падстаўляючы ў другое ўраўненне значэнне $v$, знойдзенае з першага ($v=4-u$), прыходзім да ўраўнення

$$u^2-u(4-u)+(4-u)^2=7, \text{ г. зн. } u^2-4u+3=0.$$



Атрыманае квадратнае ўраўненне мае два карані: $u_1=1$ і $u_2=3$. Адпаведныя значэнні $v$ такія: $v_1=3$ і $v_2=1$. Пераходзячы да пераменных $x$ і $y$, атрымліваем: $\sqrt[3]{x}=u_1$, г. зн. $x_1=u_1^3=1$, $y_1=v_1^3=27$, $x_2=u_2^3=27$, $y_2=v_2^3=1$. Адказ: (1; 27), (27; 1). ●

### *Практыкаванні*

Рашыце ўраўненні (417—420).

**417.** а) $\sqrt{x^4+19}=10$; б) $\sqrt[3]{x^2-28}=2$;

в) $\sqrt{61-x^2}=5$; г) $\sqrt[3]{x-9}=-3$.

**418.** а) $\sqrt{x+1}=x-5$; б) $x+\sqrt{2x+3}=6$;

в) $\sqrt{2x-1}=x-2$; г) $3+\sqrt{3x+1}=x$.

**419.** а) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2-2x+4}$; б) $\sqrt{x}=\sqrt{x^2-x-3}$;

в) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$; г) $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{x+9}$.

**420.** а) $x=\sqrt[3]{x^3+x^2-6x+8}$; б) $x-2=\sqrt[3]{x^2-8}$;

в) $x=\sqrt[3]{x^3-x^2-8x+20}$; г) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+x}$.

**421.** Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=1, \\ 3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x}+3\sqrt[4]{y}=8\sqrt{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=7, \\ 4\sqrt[4]{y}-3\sqrt[4]{x}=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y}-2\sqrt{x}=\sqrt{5}. \end{cases}$

---

Рашыце ўраўненні (422—425).

**422.** а) $\sqrt{x+1}\sqrt{x+6}=6$; б) $\dfrac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$;

в) $\dfrac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$; г) $\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2x$.

**423.** а) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x+3}}=3$; б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16}+x}=2$;

в) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$; г) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-5}}=1$.

**424.** а) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;

в) $2+\sqrt{10-x}=\sqrt{22-x}$; г) $\sqrt{1-2x}-3=\sqrt{16+x}$.

**425.** а) $\sqrt{x-3}-6=\sqrt[4]{x-3}$; б) $\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}=3$;

в) $\sqrt[4]{x-5}=30-\sqrt{x-5}$; г) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4$.

Рашыце сістэмы ўраўненняў (426—427).

**426.** а) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10, \\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8, \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2. \end{cases}$

**427.** а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8, \\ x-y=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5, \\ xy=216; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ x-y=32; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27. \end{cases}$

## 34. Ступень з рацыянальным паказчыкам

Вам ужо знаёма паняцце ступені ліку з цэлым паказчыкам. Выраз $a^n$ вызначаны для ўсіх $a$ і $n$, акрамя выпадку $a=0$ пры $n \leqslant 0$. Напомнім уласцівасці такіх ступеней.

*Для любых лікаў $a$, $b$ і любых цэлых лікаў $m$ і $n$ справядлівыя роўнасці:* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n} (a \neq 0)$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

Адзначым таксама наступную ўласцівасць:

*Калі $m > n$, то $a^m > a^n$ пры $a > 1$ і $a^m < a^n$ пры $0 < a < 1$.*

У гэтым пункце мы абагульнім паняцце ступені ліку, надаўшы сэнс выразам тыпу $2^{0,3}$, $8^{\frac{5}{7}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$ і г. д. Натуральна пры гэтым даць азначэнне так, каб ступені з рацыянальнымі паказчыкамі валодалі тымі ж уласцівасцямі (або хаця б іх часткай), што і ступені з цэлым паказчыкам. Тады, у прыватнасці, $n$-я ступень ліку $a^{\frac{m}{n}}$ павінна быць роўна $a^m$. Сапраўды, калі ўласцівасць

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

выконваецца, то $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$.

Апошняя роўнасць азначае (па азначэнню кораня $n$-й ступені), што лік $a^{\frac{m}{n}}$ павінен быць коранем $n$-й ступені з ліку $a^m$.

Азначэнне. ***Ступенню ліку $a > 0$ з рацыянальным паказчыкам $r = \frac{m}{n}$, дзе $m$ — цэлы лік, а $n$ — натуральны ($n > 1$), называецца лік $\sqrt[n]{a^m}$.***

Такім чынам, па азначэнню

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$



Ступень ліку 0 вызначана толькі для дадатных паказчыкаў; па азначэнню $0^r = 0$ для любога $r > 0$.

○ Прыклад 1. Па азначэнню ступені з рацыянальным паказчыкам

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7};\ 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32};\ a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}.$$

Прыклад 2. Знойдзем значэнні лікавых выразаў $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $128^{-\frac{2}{7}}$.

Скарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам і ўласцівасцямі каранёў, маем $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27$, $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$. ●

Заўвага 1. З азначэння ступені з рацыянальным паказчыкам адразу вынікае, што для любога дадатнага $a$ і любога рацыянальнага $r$ лік $a^r$ дадатны.

Заўвага 2. Любы рацыянальны лік дапускае розныя запісы яго ў выглядзе дробу, паколькі $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ для любога натуральнага $k$. Значэнне $a^r$ таксама не залежыць ад формы запісу рацыянальнага ліку $r$. Сапраўды, з уласцівасцей каранёў вынікае, што $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Заўвага 3. Пры $a < 0$ рацыянальная ступень ліку $a$ не вызначаецца, і гэта не выпадкова. Калі б мы палічылі правільнай формулу (1) і для $a < 0$, то, напрыклад, значэнне $(-8)^{\frac{1}{3}}$ было б роўна $\sqrt[3]{-8}$, г. зн. $-2$. Але, з другога боку, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, і таму павінна выконвацца роўнасць $-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2$.

Пакажам цяпер, што пры сфармуляваным вышэй азначэнні ступені з рацыянальным паказчыкам захоўваюцца асноўныя ўласцівасці ступеней, правільныя для любых паказчыкаў (розніца заключаецца ў тым, што прыводзімыя далей уласцівасці правільныя толькі для дадатных асноў).

*Для любых рацыянальных лікаў $r$ і $s$ і любых дадатных $a$ і $b$ справядлівыя роўнасці:*

**1°.** $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. **3°.** $(a^r)^s = a^{rs}$.
**2°.** $a^r : a^s = a^{r-s}$. **4°.** $(ab)^r = a^r \cdot b^r$.
**5°.** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Для доказу гэтых уласцівасцей трэба скарыстаць азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам і даказанымі ў п. 32 уласцівасцямі каранёў. Дакажам, напрыклад, уласцівасці 1°, 3° і 4°.

Няхай $r=\frac{m}{n}$ і $s=\frac{p}{q}$, дзе $n$ і $q$ — натуральныя лікі, а $m$ і $p$ — цэлыя. Тады

$$a^r\cdot a^s=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\cdot\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{r+s};$$

$$(a^r)^s=\sqrt[q]{(a^r)^p}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{rs};$$

$$(ab)^r=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^mb^m}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}=a^r\cdot b^r.$$

Уласцівасці 2° і 5° доказваюцца аналагічна (правядзіце адпаведныя разважанні самастойна).

○ Прыклад 3. Знойдзем значэнне выразу $\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}$.

$$\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}:5^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3\cdot 5}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=2^1\cdot 5^1=10.$$

Прыклад 4. Пераўтворым выразы:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}$.

а) $$\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}=$$
$$=a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}};$$

б) $$\frac{a^{1,2}-b^{2,1}}{a^{0,8}+a^{0,4}b^{0,7}+b^{1,4}}=\frac{(a^{0,4})^3-(b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2+a^{0,4}b^{0,7}+(b^{0,7})^2}=a^{0,4}-b^{0,7}.$$ ●

Адзначым наступныя дзве ўласцівасці ступеней з рацыянальнымі паказчыкамі:

6°. *Няхай $r$ — рацыянальны лік і $0<a<b$. Тады*

$$a^r<b^r \text{ пры } r>0,$$
$$a^r>b^r \text{ пры } r<0.$$

7°. *Для любых рацыянальных лікаў $r$ і $s$ з няроўнасці $r>S$ вынікае, што*

$$a^r>a^s \text{ пры } a>1,$$
$$a^r<a^s \text{ пры } 0<a<1.$$

Дакажам уласцівасць 6°. Калі $r>0$, то $r$ можна запісаць у выглядзе $r=\frac{m}{n}$, дзе $m$ і $n$ — натуральныя лікі. З няроўнасці $0<a<b$ і ўласцівасцей ступені з цэлым паказчыкам вынікае, што $a^m<b^m$. Па ўласцівасці каранёў (уласцівасць 6°, п. 32) з гэтай няроўнасці атрымліваем $\sqrt[n]{a^m}<\sqrt[n]{b^m}$, г. зн. $a^r<b^r$.

У выпадку $r<0$ праводзіцца аналагічнае разважанне.

Для доказу ўласцівасці 7° прывядзём спачатку рацыянальныя



лікі $r$ і $s$ да агульнага назоўніка: $r=\frac{m}{n}$ і $s=\frac{p}{n}$, дзе $n$ — натуральны лік, а $m$ і $p$ — цэлыя. З няроўнасці $r>s$ вынікае, што $m>p$. Калі $a>1$, то $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}>1$ і па ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$.

Застаецца заўважыць, што $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=a^r$ і $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p=$ $=a^{\frac{p}{n}}=a^s$.

Выпадак $0<a<1$ разбіраецца аналагічна.

○ Прыклад 5. Параўнаем лікі $\sqrt[5]{8}$ і $2^{\frac{2}{3}}$.

Запішам $\sqrt[5]{8}$ у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам: $\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$. Па ўласцівасці 7° атрымліваем $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$, таму што $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$.

Прыклад 6. Параўнаем лікі $2^{300}$ і $3^{200}$.

Запішам гэтыя лікі ў выглядзе ступеней з аднолькавым паказчыкам:

$$2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100};\quad 3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}.$$

Паколькі $8<9$, па ўласцівасці 6° атрымліваем:

$$8^{100}<9^{100}, \text{ г. зн. } 2^{300}<3^{200}.$$ ●

### *Практыкаванні*

**428.** Запішыце ў выглядзе кораня з ліку выраз:

а) $3^{1,2}$; б) $5^{-\frac{2}{3}}$; в) $4^{1,25}$; г) $6^{-1\frac{1}{2}}$.

**429.** Запішыце выраз у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $\sqrt[3]{a^{-2}}$; б) $\sqrt[7]{3b}$; в) $\sqrt[13]{b^{-7}}$; г) $\sqrt[8]{4^5}$.

Знайдзіце значэнне лікавага выразу (430—431).

**430.** а) $243^{0,4}$; б) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; в) $16^{\frac{5}{4}}$; г) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$.

**431.** а) $8^{\frac{1}{2}}:\left(8^{\frac{1}{6}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)$; б) $\sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}$;

в) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$; г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5}\cdot\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Раскладзіце на множнікі (432—433).

**432.** а) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; б) $a-a^{\frac{1}{2}}$; в) $3+3^{\frac{1}{2}}$; г) $(3x)^{\frac{1}{2}}-(5x)^{\frac{1}{2}}$.

**433.** а) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1$; б) $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$; в) $4 - 4^{\frac{1}{3}}$;

г) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

Спрасціце выразы (434—435).

**434.** а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4}$;

в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16}$; г) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$.

**435.** а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{a-1}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} : \dfrac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} - 1} + 2a^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{a + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$;

г) $\dfrac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$.

**436.** Параўнайце лікі:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ і $3^{\frac{19}{8}}$; б) $0{,}4^{-2{,}7}$ і $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}$;

в) $\sqrt[3]{6^5}$ і $6^{1{,}7}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$ і $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$.

**437.** Знайдзіце значэнне выразу:

а) $81^{-0{,}75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

б) $0{,}001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2}64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2$;

в) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75} - 25^{0{,}5}$;

г) $(-0{,}5)^{-4} - 625^{0{,}25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3}$.

**438.** Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$;



б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}} - 27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 3\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right) - \sqrt[3]{a^2}$;

г) $\left(\dfrac{1}{m + \sqrt{2}} - \dfrac{m^2 + 4}{m^3 + 2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\dfrac{m}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{m}\right)$.

**439.** Запішыце выраз у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5 \cdot ax^3}$; б) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}$;

в) $\sqrt[7]{b^3} \cdot \sqrt[4]{b}$; г) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}}$.

**440.** Запішыце выраз у выглядзе кораня:

а) $3 \cdot 2^{-\frac{3}{5}}$; б) $a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{5}}$; в) $2b^{-\frac{2}{3}}$; г) $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}$.

**441.** Параўнайце лікі:

а) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$ і $\sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$; б) $3^{600}$ і $5^{400}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$ і $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$; г) $7^{30}$ і $4^{40}$.

**442.** Ці мае сэнс выраз:

а) $(-3)^{-\frac{1}{7}}$; б) $(-2)^{-4}$; в) $5^{\frac{2}{3}}$; г) $0^{-\frac{4}{7}}$?

**443.** Знайдзіце вобласць вызначэння выразу:

а) $(x+1)^{-\frac{2}{7}}$; б) $x^{\frac{3}{5}}$; в) $x^{-\frac{3}{4}}$; г) $(x-5)^{\frac{2}{3}}$.

**444.** Пры якіх значэннях пераменнай правільная роўнасць:

а) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6 = a$; б) $(a^4)^{\frac{1}{4}} = -a$;

в) $(a^8)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{|a|}$; г) $(a^{0{,}7})^{1\frac{3}{7}} = -a$?

## § 10. ПАКАЗАЛЬНАЯ І ЛАГАРЫФМІЧНАЯ ФУНКЦЫІ

### 35. Паказальная функцыя

**1. Ступень з ірацыянальным паказчыкам.** Зафіксуем дадатны лік $a$ і паставім у адпаведнасць кожнаму ліку $\frac{m}{n}$ лік $a^{\frac{m}{n}}$. Тым

самым атрымаем лікавую функцыю $f(x)=a^x$, якая вызначана на мностве $\boldsymbol{Q}$ рацыянальных лікаў і ўладае пералічанымі ў п. 34 уласцівасцямі. Пры $a=1$ функцыя $f(x)=a^x$ пастаянная, таму што $1^x=1$ для любога рацыянальнага $x$.

Нанясём некалькі пунктаў графіка функцыі $y=2^x$, папярэдне вылічыўшы з дапамогай калькулятара значэнні $2^x$ на адрэзку $[-2; 3]$ з шагам $\frac{1}{4}$ (рыс. 132, *а*), а затым з шагам $\frac{1}{8}$ (рыс. 132, *б*). Працягваючы ў думках такія ж пабудаванні з шагам $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ і г. д., мы бачым, што пункты, якія атрымліваюцца, можна злучыць плаўнай крывой, якую натуральна лічыць графікам некаторай функцыі, што вызначана і ўзрастае ўжо на ўсёй лікавай прамой і прымае значэнні $2^{\frac{m}{n}}$ у рацыянальных пунктах $x=\frac{m}{n}$ (рыс. 132, *в*). Пабудаваўшы дастаткова вялікі лік пунктаў графіка функцыі $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, можна пераканацца, што аналагічнымі ўласцівасцямі валодае і гэта функцыя (адрозненне заключаецца ў тым, што функцыя $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$ убывае на $\boldsymbol{R}$.

Гэтыя назіранні падказваюць, што можна так вызначыць лікі $2^\alpha$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$ для кожнага ірацыянальнага $\alpha$, што функцыі, якія задаюцца формуламі $y=2^x$ і $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, будуць непарыўнымі, прычым функцыя $y=2^x$ узрастае, а функцыя $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывае на ўсёй лікавай прамой.

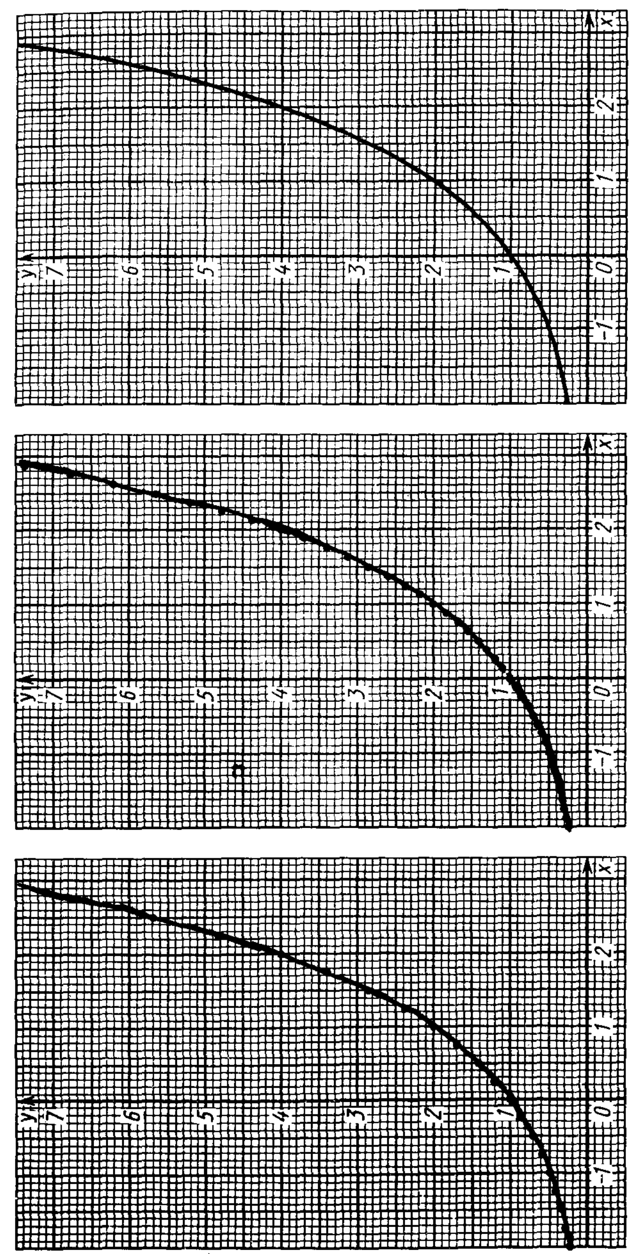
Апішам у агульных рысах, як вызначаецца лік $a^\alpha$ для ірацыянальных $\alpha$ пры $a>1$. Мы хочам дабіцца таго, каб функцыя $y=a^x$ была ўзрастаючай. Тады пры любых рацыянальных $r_1$ і $r_2$, такіх, што $r_1<\alpha<r_2$, значэнне $a^\alpha$ павінна задавальняць няроўнасцям $a^{r_1}<a^\alpha<a^{r_2}$.

Выбіраючы значэнні $r_1$ і $r_2$, якія прыбліжаюцца да $x$, можна заўважыць, што і адпаведныя значэнні $a^{r_1}$ і $a^{r_2}$ будуць мала адрозніваюцца. Можна даказаць, што існуе, і прытым толькі адзін, лік $y$, які большы за ўсе $a^{r_1}$ для ўсіх рацыянальных $r_1$ і меншы за ўсе $a^{r_2}$ для ўсіх рацыянальных $r_2$. Гэты лік $y$ па азначэнню ёсць $a^\alpha$.

Напрыклад, вылічыўшы з дапамогай калькулятара значэнні $2^x$ у пунктах $x_n$ і $x_n'$, дзе $x_n$ і $x_n'$ — дзесятковыя прыбліжэнні ліку $x=\sqrt{3}$, мы заўважым, што, чым бліжэй $x_n$ і $x_n'$ да $\sqrt{3}$, тым менш адрозніваюцца $2^{x_n}$ і $2^{x_n'}$.

Паколькі $1<\sqrt{3}<2$, то

$$2^1=2<2^{\sqrt{3}}<2^2=4.$$


а) б) в)

Рыс. 132

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ і, значыць,

$$2^{1,7} \approx 3{,}2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3{,}4822022.$$

Аналагічна, разглядаючы наступныя дзесятковыя прыбліжэнні $\sqrt{3}$ па недахопу і лішку, прыходзім да суадносін:

$$2^{1,73} \approx 3{,}3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1,732} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1,7320} \approx 3{,}321801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1,73205} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1,732050} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3{,}3219975.$$

Значэнне $2^{\sqrt{3}}$, якое вылічана на калькулятары, такое:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997.$$

Аналагічна вызначаецца лік $a^{\alpha}$ для $0 < \alpha < 1$. Акрамя таго, лічаць $1^{\alpha} = 1$ для любога $\alpha$ і $0^{\alpha} = 0$ для $\alpha > 0$.

**2. Уласцівасці паказальнай функцыі.**

Азначэнне. **Функцыя, зададзеная формулай $y = a^x$ (дзе $a > 0$, $a \neq 1$), называецца *паказальнай функцыяй з асновай a*.**

Сфармулюем асноўныя ўласцівасці паказальнай функцыі (іх доказ выходзіць за рамкі школьнага курса).

1. *Вобласць азначэння — мноства $\boldsymbol{R}$ сапраўдных лікаў.*
2. *Вобласць значэнняў — мноства $\boldsymbol{R}_+$ усіх дадатных сапраўдных лікаў.*
3. *Пры $a > 1$ функцыя ўзрастае на ўсёй лікавай прамой; пры $0 < a < 1$ функцыя ўбывае на мностве $\boldsymbol{R}$.*

Графікі паказальных функцый для выпадкаў $a > 1$ і $0 < a < 1$ дадзены на рысунках 133—134.

4. *Пры любых сапраўдных значэннях $x$ і $y$ справядлівыя роўнасці*

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$
$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Гэтыя формулы называюць *асноўнымі ўласцівасцямі ступеней*.

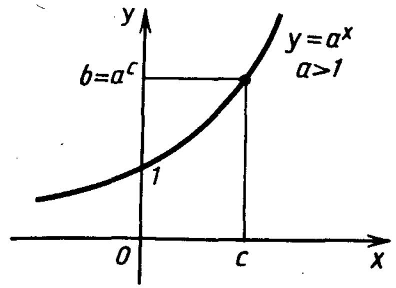
Уласцівасці 3 і 4 азначаюць, што для функцыі $y = a^x$, якая вызначана на ўсёй лікавай прамой, застаюцца правільнымі ўласцівасці функцыі $y = a^x$, якая спачатку была вызначана толькі для рацыянальных $x$ (гл. уласцівасці $1° - 7°$, п. 34).

### *Практыкаванні*

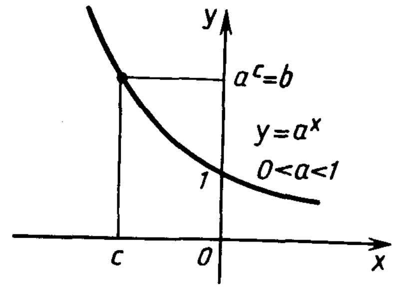
**445.** Пералічыце ўласцівасці функцыі і пабудуйце яе графік:

а) $y = 4^x$; б) $y = 0{,}2^x$; в) $y = 0{,}7^x$; г) $y = 2{,}5^x$.






Рыс. 133




Рыс. 134

**446.** Знайдзіце вобласць значэнняў функцыі:

а) $y = -2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; в) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$; г) $y = 5^x - 2$.

**447.** Параўнайце лікі:

а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ і 1; б) $3^{-\sqrt{12}}$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$;

в) $2{,}5^{-\sqrt{2}}$ і 1; г) $0{,}3^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ і $0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

**448.** Вылічыце:

а) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; б) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; г) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

Спрасціце выразы (449—450).

**449.** а) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$; б) $x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}}$;

в) $(a^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$; г) $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} : \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$.

**450.** а) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1$; б) $\frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$;

в) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$; г) $\sqrt{(x^{\pi} + y^{\pi})^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} xy\right)^{\pi}}$.

---

**451.** Вылічыце з дакладнасцю да 0,1 (карыстаючыся табліцамі або калькулятарам) значэнні:

а) $10^{1,41}$ і $10^{1,42}$; б) $10^{1,414}$ і $10^{1,415}$;
в) $10^{2,23}$ і $10^{2,24}$; г) $10^{2,236}$ і $10^{2,237}$.

**452.** Карыстаючыся атрыманымі ў задачы 451 рэзультатамі, знайдзіце значэнні $10^{\sqrt{2}}$ і $10^{\sqrt{5}}$ з дакладнасцю да 0,2.

**453.** Запішыце, якая з дадзеных функцый з'яўляецца ўзрастаючай, якая — убываючай на мностве $\boldsymbol{R}$:

а) $y=(\sqrt{2})^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$;

б) $y=(\sqrt{5}-2)^x$, $y=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^x}$;

в) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$;

г) $y=(3-\sqrt{7})^x$, $y=\frac{1}{(3-\sqrt{7})^x}$.

**454.** Знайдзіце вобласць значэнняў функцыі:

а) $y=3^{x+1}-3$; б) $y=|2^x-2|$; в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$; г) $y=4^{|x|}$.

**455.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі на $\boldsymbol{R}$:

а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$; б) $y=5+3^{|\cos x|}$;

в) $y=4^{\cos x}$; г) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}-2$.

**456.** Знайдзіце знак кораня ўраўнення:

а) $\left(\frac{1}{6}\right)^x=10$; б) $0,3^x=0,1$; в) $10^x=4$; г) $0,7^x=5$.

Рашыце графічна ўраўненні (457—458).

**457.** а) $3^x=4-x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x+3$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$; г) $4^x=5-x$.

**458.** а) $3^{1-x}=2x-1$; б) $4^x+1=6-x$;

в) $2^x-2=1-x$; г) $3^{-x}=-\frac{3}{x}$.

**459.** Ці правільна, што паказальная функцыя $f(x)=a^x$:
а) мае экстрэмумы;
б) прымае найбольшае значэнне ў некаторым пункце $x_0$;
в) прымае ў некаторым пункце значэнне, роўнае нулю;
г) з'яўляецца цотнай (няцотнай)?

## 36. Рашэнне паказальных ураўненняў і няроўнасцей

**1. Ураўненні.** Разгледзім найпрасцейшае паказальнае ўраўненне

$$a^x=b, \qquad (1)$$



дзе $a>0$ і $a\neq 1$. Вобласць значэнняў функцыі $y=a^x$ — мноства дадатных лікаў. Таму ў выпадку $b<0$ або $b=0$ ураўненне (1) не мае рашэнняў.

Няхай $b>0$. Функцыя $y=a^x$ на прамежку $(-\infty;\ \infty)$ узрастае пры $a>1$ (убывае пры $0<a<1$) і прымае ўсе дадатныя значэнні. Прымяняючы тэарэму аб корані (п. 8), атрымліваем, што ўраўненне (1) пры любым дадатным $a$, адрозным ад 1, і $b>0$ мае адзіны корань. Для таго каб яго знайсці, трэба $b$ запісаць у выглядзе $b=a^c$. Відавочна, што $c$ з'яўляецца рашэннем ураўнення $a^x=a^c$ (рыс. 134).

○ Прыклад 1. Рэшым ураўненне $7^{x-2}=\sqrt[3]{49}$.

Заўважым, што $49=7^2$, а $\sqrt[3]{49}=7^{\frac{2}{3}}$. Таму дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $7^{x-2}=7^{\frac{2}{3}}$. Значыць, каранямі дадзенага ўраўнення з'яўляюцца такія лікі $x$, для якіх $x-2=\frac{2}{3}$, г. зн. $x=2\frac{2}{3}$. Адказ: $x=2\frac{2}{3}$.

Прыклад 2. Рэшым ураўненне $5^{x^2-2x-1}=25$.

Перапішам яго ў выглядзе $5^{x^2-2x-1}=5^2$. Каранямі гэтага ўраўнення з'яўляюцца такія лікі $x$, для якіх $x^2-2x-1=2$. Прыходзім да квадратнага ўраўнення, карані якога — лікі 3 і $-1$. Адказ: 3; $-1$.

Прыклад 3. Рэшым ураўненне $6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71$.

Заўважым, што $6^{x+1}=36\cdot 6^{x-1}$. Таму дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $36\cdot 6^{x-1}+35\cdot 6^{x-1}=71$, г. зн. $71\cdot 6^{x-1}=71$, адкуль $6^{x-1}=6^0$, $x-1=0$, $x=1$. Адказ: 1.

Прыклад 4. Рэшым ураўненне $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

Зробім замену пераменнай $t=2^x$. Заўважым, што $4^x=(2^x)^2=t^2$. Таму дадзенае ўраўненне прымае выгляд $t^2-5t+4=0$. Знойдзем рашэнні гэтага квадратнага ўраўнення: $t_1=1$ і $t_2=4$. Рашаючы ўраўненні $2^x=1$ і $2^x=4$, атрымліваем $x=0$ і $x=2$. Адказ: 0, 2. ●

**2. Няроўнасці і сістэмы ўраўненняў.** Рашэнне найпрасцейшых паказальных няроўнасцей заснавана на вядомай уласцівасці функцыі $y=a^x$: гэта функцыя ўзрастае пры $a>1$ і ўбывае пры $0<a<1$.

Прыклад 5. Рэшым няроўнасць $0,5^{7-3x}<4$.

Карыстаючыся тым, што $0,5^{-2}=4$, перапішам зададзеную няроўнасць у выглядзе $0,5^{7-3x}<0,5^{-2}$. Паказальная функцыя $y=0,5^x$ убывае (аснова 0,5 меншая за 1). Таму дадзеная няроўнасць раўназначная няроўнасці $7-3x>-2$, адкуль $x<3$. Адказ: $(-\infty;\ 3)$.

Прыклад 6. Рэшым няроўнасць $6^{x^2+2x}>6^3$.

Паказальная функцыя $y=6^x$ узрастае. Таму дадзеная няроўнасць раўназначная няроўнасці $x^2+2x>3$, рашаючы якую атрымаем адказ: $(-\infty;\ -3)$ і $(1;\ \infty)$.

Прыклад 7. Рэшым няроўнасць $\left(\frac{1}{9}\right)^x-\frac{28}{3^{x+1}}+3<0$.

Зробім замену $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, тады $\left(\frac{1}{9}\right)^x=t^2$ і няроўнасць перапішацца ў выглядзе $t^2-\frac{28}{3}t+3<0$, адкуль $\frac{1}{3}<t<9$. Значыць, рашэннем дадзенай няроўнасці з'яўляюцца лікі $x$, якія задавальняюць няроўнасцям $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$, і толькі такія лікі. Але $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, а функцыя $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывае, паколькі $\frac{1}{3}<1$. Таму рашэннем няроўнасці $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<9$ будуць лікі $x$, якія задавальняюць няроўнасцям $-2<x<1$. Адказ: $(-2;\ 1)$.

Прыклад 8. Рэшым сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases}2^x+2^y=12,\\ 3^{2x-y}=3.\end{cases}$$

З другога ўраўнення сістэмы знаходзім $2x-y=1$, адкуль $y=2x-1$. Падстаўляючы замест $y$ у першае ўраўненне выраз $2x-1$, атрымаем $2^x+2^{2x-1}=12$, адкуль $2^x+\frac{1}{2}\cdot 2^{2x}=12$. Абазначыўшы $2^x$ праз $t$, прыходзім да квадратнага ўраўнення $t^2+2t-24=0$, адкуль $t_1=-6$; $t_2=4$. Ураўненне замены $2^x=-6$ рашэнняў не мае. Коранем ураўнення $2^x=4$ з'яўляецца лік $x=2$. Адпаведнае значэнне $y$ роўна 3. Адказ: $(2;\ 3)$. ●

### *Практыкаванні*

Рашыце ўраўненні (460—464).

**460.** а) $4^x=64$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=27$; в) $3^x=81$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{64}$.

**461.** а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$; б) $\sqrt{8^{x-3}}=\sqrt[3]{4^{2-x}}$;
в) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$; г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

**462.** а) $3^{6-x}=3^{3x-2}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}$;
в) $\sqrt{3^x}=9$; г) $2^{x^2+2x-0,5}=4\sqrt{2}$.

**463.** а) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$; б) $2\cdot 3^{x+1}-3^x=15$;
в) $4^{x+1}+4^x=320$; г) $3\cdot 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+1}=77$.

**464.** а) $9^x-8\cdot 3^x-9=0$; б) $100^x-11\cdot 10^x+10=0$;
в) $36^x-4\cdot 6^x-12=0$; г) $49^x-8\cdot 7^x+7=0$.

**465.** Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases}4^{x+y}=16,\\ 4^{x+2y-1}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}6^{3x-y}=\sqrt{6},\\ 2^{y-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}};\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^{2y-x}=\frac{1}{81},\\ 3^{x-y+2}=27;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-y}=25,\\ 7^{9x-y}=\sqrt{7}.\end{cases}$

Рашыце няроўнасці (466—467).

**466.** а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant 27$; б) $(\sqrt{6})^x\leqslant\frac{1}{36}$;
в) $0,2^x\leqslant\frac{1}{25}$; г) $(1,5)^x<2,25$.

**467.** а) $4^{5-2x}\leqslant 0,25$; б) $0,3^{7+4x}>0,027$;
в) $0,4^{2x+1}>0,16$; г) $3^{2-x}<27$.

---

Рашыце ўраўненні (468—470).

**468.** а) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=75$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=4,8$;
в) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=162$; г) $5\cdot 9^x+9^{x-2}=406$.

**469.** а) $2^{x-2}=3^{x-2}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$;
в) $5^{x+1}=8^{x+1}$; г) $7^{x-2}=4^{2-x}$.

**470.** а) $3^x+3^{3-x}=12$; б) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$;
в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{5}\right)^x=4,96$; г) $4^x-0,25^{x-2}=15$.

**471.** Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases}5^{x+y}=125,\\ 4^{(x-y)^2-1}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=5,\\ 4^x+4^y=80;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^x+3^y=12,\\ 6^{x+y}=216;\end{cases}$ г) $\begin{cases}4^{x+y}=128,\\ 5^{3x-2y-3}=1.\end{cases}$

Рашыце няроўнасці (472—474).

**472.** а) $2^{x^2}>\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$; б) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x}<(\sqrt{5})^{x^2+3,75}$;
в) $3^{4x+3}\leqslant\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10x}>64^{2\frac{2}{3}-x^2}$.

**473.** а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}>2,5$; б) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}<448$;
в) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1}-\left(\frac{4}{3}\right)^x>\frac{3}{16}$; г) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$.

**474.** а) $\pi^x-\pi^{2x}\geqslant 0$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}-10\cdot 3^{-x}+3<0$;
в) $4^x-2^{x+1}-8>0$; г) $\left(\frac{1}{36}\right)^x-5\cdot 6^{-x}-6\leqslant 0$.

**475.** Рашыце графічна няроўнасць:

а) $2^x \leqslant 3 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 2x + 5$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 2x + 1$; г) $3^x \geqslant 4 - x$.

### 37. Лагарыфмы і іх уласцівасці

**1. Лагарыфм.** Вернемся да ўраўнення $a^x = b$, дзе $a > 0$ і $a \neq 1$. Як паказана ў папярэднім пункце, гэта ўраўненне не мае рашэнняў пры $b \leqslant 0$ і мае адзіны корань у выпадку $b > 0$. Гэты корань называюць лагарыфмам $b$ па аснове $a$ і абазначаюць $\log_a b$, г. зн.

$$a^{\log_a b} = b.$$

Азначэнне. ***Лагарыфмам* ліку $b$ па аснове $a$ называецца паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці аснову $a$, каб атрымаць лік $b$.**

Формулу $a^{\log_a b} = b$ (дзе $b > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$) называюць *асноўнай лагарыфмічнай тоеснасцю.*

Прыклад 1. Знойдзем значэнне: а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0{,}04$.

а) Заўважым, што $32 = 2^5$, г. зн. для таго каб атрымаць лік 32, трэба 2 узвесці ў пятую ступень. Значыць, $\log_2 32 = 5$.

б) Заўважым, што $0{,}04 = \frac{1}{25} = 5^{-2}$, таму $\log_5 0{,}04 = -2$.

Прыклад 2. Знойдзем лагарыфм ліку $\frac{1}{9}$ па аснове $\sqrt{3}$.

Заўважым, што $(\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{9}$. Таму па азначэнню лагарыфма $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = -4$.

Прыклад 3. Знойдзем $x$, такі, што: а) $\log_8 x = \frac{1}{3}$; б) $\log_x 8 = -\frac{3}{4}$.

Скарыстаем асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

а) $x = 8^{\log_8 x} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$;

б) $x^{\log_x 8} = 8$, г. зн. $x^{-\frac{3}{4}} = 8$, адкуль $x = 8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$. ●

**2. Асноўныя ўласцівасці лагарыфмаў.** Пры рабоце з лагарыфмамі прымяняюцца наступныя іх уласцівасці, якія вынікаюць з уласцівасцей паказальнай функцыі:

*Пры любым $a > 0$ $(a \neq 1)$ і любых дадатных $x$ і $y$ выкананы роўнасці:*



**1°.** $\log_a 1 = 0$.

**2°.** $\log_a a = 1$.

**3°.** $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

**4°.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

**5°.** $\log_a x^p = p \log_a x$

для любога сапраўднага $p$.

Для доказу правіла 3° скарыстаем асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

$$x = a^{\log_a x}, \quad y = a^{\log_a y}. \qquad (1)$$

Перамнажаючы пачленна гэтыя роўнасці, атрымліваем:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

г. зн. $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. Значыць, па азначэнню лагарыфма $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

Коратка гавораць, што *лагарыфм здабытку роўны суме лагарыфмаў.*

Правіла 4° дакажам зноў з дапамогай роўнасцей (1):

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y},$$

значыць, па азначэнню $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_b y$.

Гавораць, што *лагарыфм дзелі роўны рознасці лагарыфмаў.*

Для доказу правіла 5° скарыстаем тоеснасць $x = a^{\log_a x}$, адкуль $x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x}$. Значыць, па азначэнню $\log_a x^p = p \log_a x$. Гавораць, што *лагарыфм ступені роўны здабытку паказчыка ступені на лагарыфм асновы гэтай ступені.*

Асноўныя ўласцівасці лагарыфмаў шырока прымяняюцца ў ходзе пераўтварэння выразаў, якія змяшчаюць лагарыфмы. Дакажам, напрыклад, *формулу пераходу* ад адной асновы лагарыфма да другой асновы:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

(Гэта формула правільная, калі абедзве яе часткі маюць сэнс, г. зн. пры $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, $b > 0$ і $b \neq 1$.)

Па правілу лагарыфмавання ступені і асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці атрымліваем:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}),$$

адкуль

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Падзяліўшы абедзве часткі атрыманай роўнасці на $\log_b a$, прыходзім да патрэбнай формулы.

З дапамогай формулы пераходу можна знайсці значэнне лагарыфма з адвольнай асновай $a$, маючы табліцы лагарыфмаў, складзеныя для якой-небудзь адной асновы $b$. Найбольш вы-

карыстоўваюцца табліцы дзесятковых і натуральных лагарыфмаў (*дзесятковымі* называюць лагарыфмы па аснове 10 і абазначаюць lg, а з натуральнымі лагарыфмамі вы пазнаёміцеся ў п. 41).

○ Прыклад 4. Знойдзем $\log_{0,3} 7$.

Карыстаючыся калькулятарам (або табліцамі), знаходзім $\lg 7 \approx 0{,}8451$, $\lg 0{,}3 \approx 0{,}4771 - 1 = -0{,}5229$. Значыць, па формуле пераходу $\log_{0,3} 7 \approx \frac{0{,}8451}{-0{,}5229} \approx -1{,}6162$.

Прыклад 5. Вядома, што $\log_2 5 = a$ і $\log_2 3 = b$. Выразім $\log_2 300$ праз $a$ і $b$.

Карыстаючыся асноўнымі ўласцівасцямі лагарыфмаў, атрымліваем:

$$\log_2 300 = \log_2 (3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2.$$

Прыклад 6. Выразім лагарыфм выразу $8a^3\sqrt[7]{b^4}$ праз $\log_2 a$ і $\log_2 b$. (Коратка гавораць: пралагарыфмуем дадзены выраз па аснове 2.)

Карыстаючыся асноўнымі ўласцівасцямі лагарыфмаў, атрымліваем:

$$\log_2 \left(8a^3\sqrt[7]{b^4}\right) = \log_2 \left(2^3 \cdot a^3 \cdot b^{\frac{4}{7}}\right) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b = 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b.$$

Прыклад 7. Знойдзем $x$, калі

$$\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2.$$

Спачатку пераўтворым правую частку дадзенай роўнасці, карыстаючыся асноўнымі ўласцівасцямі лагарыфмаў:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

г. зн. $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$ і таму $x = \frac{63}{8} = 7{,}875$.

Прыклад 8. Знойдзем значэнне выразу $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$.

Карыстаючыся асноўнымі ўласцівасцямі лагарыфмаў, пераўтворым лічнік і назоўнік гэтага дробу: $\lg 72 - \lg 9 = \lg \frac{72}{9} = \lg 8 = 3\lg 2$; $\lg 28 - \lg 7 = \lg \frac{28}{7} = \lg 4 = 2\lg 2$. Значыць, $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2}$. ●



### *Практыкаванні*

Знайдзіце лагарыфм па аснове $a$ ліку, які дадзены ў выглядзе ступені з асновай $a$ (476—478).

**476.** а) $3^2 = 9$; б) $2^{-3} = \frac{1}{8}$; в) $4^2 = 16$; г) $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

**477.** а) $9^{\frac{1}{2}} = 3$; б) $7^0 = 1$; в) $32^{\frac{1}{5}} = 2$; г) $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

**478.** а) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; б) $32^{\frac{3}{5}} = 8$; в) $81^{\frac{3}{4}} = 27$; г) $125^{\frac{2}{3}} = 25$.

Праверце справядлівасць роўнасцей (479—482).

**479.** а) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; б) $\log_{16} 1 = 0$; в) $\log_4 16 = 2$; г) $\log_5 125 = 3$.

**480.** а) $\log_5 0{,}04 = -2$; б) $\log_7 343 = 3$; в) $\lg 0{,}01 = -2$; г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$.

**481.** а) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$; б) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; г) $\log_{0,5} 4 = -2$.

**482.** а) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; б) $\log_{0,2} 0{,}008 = 3$; в) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2 = -2$; г) $\log_{0,2} 125 = -3$.

**483.** Знайдзіце лагарыфмы дадзеных лікаў па аснове $a$:

а) $25$, $\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$ пры $a = 5$; б) $64$, $\frac{1}{8}$, $2$ пры $a = 8$;

в) $16$, $\frac{1}{4}$, $\sqrt{2}$ пры $a = 2$; г) $27$, $\frac{1}{9}$, $\sqrt{3}$ пры $a = 3$.

Знайдзіце лік $x$ (484—486).

**484.** а) $\log_3 x = -1$; б) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$; в) $\log_5 x = 2$; г) $\log_7 x = -2$.

**485.** а) $\log_4 x = -3$; б) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$; в) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1$; г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$.

**486.** а) $\log_x 81 = 4$; б) $\log_x \frac{1}{16} = 2$; в) $\log_x \frac{1}{4} = -2$; г) $\log_x 27 = 3$.

**487.** Запішыце лік у выглядзе лагарыфма з асновай $a$:

а) $2$; $\frac{1}{2}$; $1$; $0$ пры $a = 4$; б) $3$; $-1$; $-3$; $1$ пры $a = 3$;

в) $3$; $\frac{1}{2}$; $0$; $-1$ пры $a = 2$; г) $1$; $-2$; $0$; $3$ пры $a = 5$.

Спрасціце выразы, карыстаючыся асноўнай лагарыфмічнай тоеснасцю (488—490).

**488.** а) $1{,}7^{\log_{1,7} 2}$; б) $\pi^{\log_{\pi} 5{,}2}$; в) $2^{\log_2 5}$; г) $3{,}8^{\log_{3,8} 11}$.

**489.** а) $5^{1+\log_5 3}$; б) $10^{1-\lg 2}$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_{\frac{1}{7}} 2}$; г) $3^{2-\log_3 18}$.

**490.** а) $4^{2\log_4 3}$; б) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_{\frac{1}{2}} 3}$; г) $6^{-2\log_6 5}$.

**491.** Пралагарыфмуйце па аснове $3 (a > 0,\ b > 0)$:

а) $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0{,}2}$; в) $9a^4\sqrt[5]{b}$; г) $\frac{b^2}{27a^7}$.

Пралагарыфмуйце па аснове 10, дзе $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ (492—493).

**492.** а) $100\sqrt{ab^3c}$; б) $\frac{a^5}{0{,}1c^2\sqrt{b}}$; в) $\sqrt[3]{10}\, a^{\frac{1}{3}} b^4 c^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{0{,}01c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} b^3}$.

**493.** а) $10^3 a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{-3}$; б) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5 a^6 c^5}$;

в) $10^{-4} a^2 b^5 c^{\frac{2}{3}}$; г) $\frac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7 a^{\frac{2}{3}} b^8}$.

---

**494.** Вядома, што $\log_5 2 = a$ і $\log_5 3 = b$. Выразіце праз $a$ і $b$: а) $\log_5 72$; б) $\log_5 15$; в) $\log_5 12$; г) $\log_5 30$.

Вылічыце (495—496).

**495.** а) $\lg 8 + \lg 125$; б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$;

в) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; г) $\lg 13 - \lg 130$.

**496.** а) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$; б) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$;

в) $\log_2 11 - \log_2 44$; г) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$.

**497.** Знайдзіце $x$, калі:

а) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - 2\log_6 3$;

б) $\lg x = \frac{1}{2}\lg 5a - 3\lg b + 4\lg c$;

в) $\lg x = 5\lg m + \frac{2}{3}\lg n - \frac{1}{4}\lg p$;

г) $\log_4 x = \frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10 + 4\log_4 3$.

**498.** Дакажыце:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$; б) $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$;

в) $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$; г) $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$.



## 38. Лагарыфмічная функцыя

Няхай $a$ — дадатны лік, не роўны 1.

Азначэнне. **Функцыю, зададзеную формулай**

$$y = \log_a x, \tag{1}$$

**называюць *лагарыфмічнай функцыяй з асновай а*.**

Пералічым асноўныя ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі.

1. *Вобласць вызначэння лагарыфмічнай функцыі — мноства ўсіх дадатных лікаў* $\boldsymbol{R}_+$, г. зн. $D(\log_a) = \boldsymbol{R}_+$.

Сапраўды, як адзначалася ў папярэднім пункце, кожны дадатны лік $x$ мае лагарыфм па аснове $a$.

2. *Вобласць значэнняў лагарыфмічнай функцыі — мноства ўсіх сапраўдных лікаў.*

Сапраўды, па азначэнню лагарыфма любога сапраўднага $y$ справядлівая роўнасць

$$\log_a(a^y) = y, \tag{2}$$

г. зн. функцыя $y = \log_a x$ прымае значэнне $y_0$ у пункце $x_0 = a^{y_0}$.

3. *Лагарыфмічная функцыя на ўсёй вобласці вызначэння ўзрастае (пры $a > 1$) або ўбывае (пры $0 < a < 1$).*

Дакажам, напрыклад, што пры $a > 1$ функцыя ўзрастае (у выпадку $0 < a < 1$ праводзіцца аналагічнае разважанне).

Няхай $x_1$ і $x_2$ — адвольныя дадатныя лікі і $x_2 > x_1$. Трэба даказаць, што $\log_a x_2 > \log_a x_1$. Дапусцім адваротнае, г. зн. што

$$\log_a x_2 \leqslant \log_a x_1. \tag{3}$$

Паколькі паказальная функцыя $y = a^x$ пры $a > 1$ узрастае, з няроўнасці (3) вынікае:

$$a^{\log_a x_2} \leqslant a^{\log_a x_1}. \tag{4}$$

Але $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$ (па азначэнню лагарыфма), г. зн. няроўнасць (4) азначае, што $x_2 \leqslant x_1$. Гэта супярэчыць дапушчэнню $x_2 > x_1$.

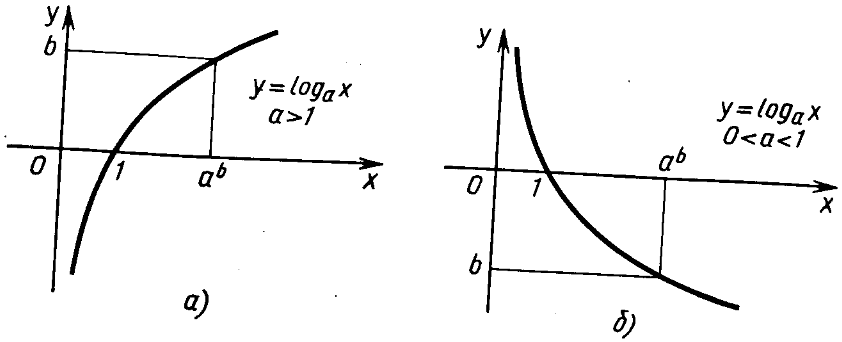
Для пабудавання графіка заўважым, што значэнне 0 лагарыфмічная функцыя прымае ў пункце 1; $\log_a 1 = 0$ пры любым $a > 0$, таму што $a^0 = 1$.

У выніку ўзрастання функцыі пры $a > 1$ атрымліваем, што пры $x > 1$ лагарыфмічная функцыя прымае дадатныя значэнні, а пры $0 < x < 1$ — адмоўныя.

Калі $0 < a < 1$, то $y = \log_a x$ убывае на $\boldsymbol{R}_+$, таму $\log_a x > 0$ пры $0 < x < 1$ і $\log_a x < 0$ пры $x > 1$. Абапіраючыся на доказаныя ўласцівасці, няцяжка пабудаваць графік функцыі $y = \log_a x$ пры $a > 1$ (рыс. 135, *а*) і $0 < a < 1$ (рыс. 135, *б*).

Справядлівае наступнае сцверджанне (доказ гл. у п. 40): *Графікі паказальнай і лагарыфмічнай функцый, якія маюць аднолькавую аснову, сіметрычныя адносна прамой $y = x$* (рыс. 136).

Разгледзім прыклады прымянення ўласцівасцей лагарыфмічнай функцыі.




Рыс. 135

○ Прыклад 1. Знойдзем вобласць вызначэння функцыі

$$f(x)=\log_8(4-5x).$$

Вобласць вызначэння лагарыфмічнай функцыі — мноства $\boldsymbol{R}_+$. Таму зададзеная функцыя вызначана толькі для тых $x$, пры якіх $4-5x>0$, г. зн. пры $x<0{,}8$. Значыць, вобласцю вызначэння зададзенай функцыі з'яўляецца інтэрвал $(-\infty;\ 0{,}8)$.

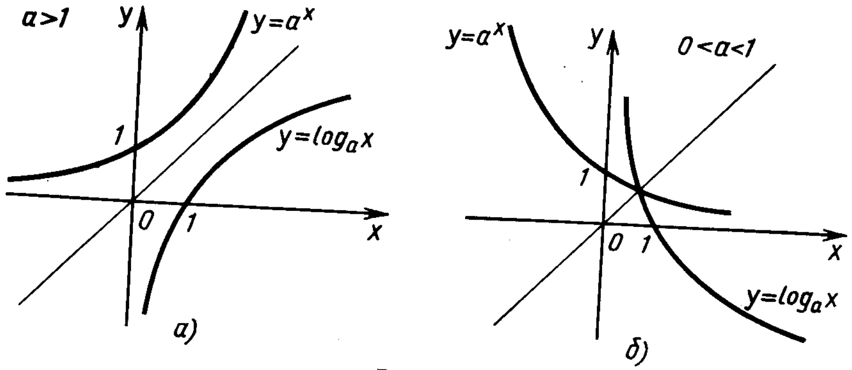
Прыклад 2. Знойдзем вобласць вызначэння функцыі

$$f(x)=\log_2(x^2-3x-4).$$

Як і ў папярэднім прыкладзе, функцыя $f$ вызначана для ўсіх тых $x$, пры якіх $x^2-3x-4>0$. Рашаючы гэту квадратычную няроўнасць, атрымліваем, што $D(f)$ — аб'яднанне інтэрвалаў $(-\infty;\ -1)$ і $(4;\ \infty)$.

Прыклад 3. Знойдзем вобласць вызначэння функцыі

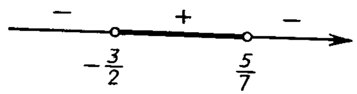
$$f(x)=\log_7\frac{2x+3}{5-7x}.$$




Рыс. 136



Рашаючы метадам інтэрвалаў няроўнасць $\frac{2x+3}{5-7x}>0$, знаходзім (рыс. 137), што $D(f)=\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{7}\right)$.




Рыс. 137

Прыклад 4. Параўнаем лікі: а) $\log_3 5$ і $\log_3 7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ і $\log_{\frac{1}{3}} 7$; в) $\log_3 10$ і $\log_4 12$.

а) Лагарыфмічная функцыя з асновай, большай за 1, узрастае на ўсёй лікавай прамой. Паколькі $7>5$, то $\log_3 7>\log_3 5$.

б) У дадзеным выпадку аснова лагарыфма меншая за 1, таму функцыя $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ убывае, і, значыць, $\log_{\frac{1}{3}} 7<\log_{\frac{1}{3}} 5$.

в) Заўважым, што $10>9=3^2$ і таму $\log_3 10>2$, з другога боку, $12<16=4^2$, і, значыць, $\log_4 12<2$. Такім чынам, $\log_3 10>\log_4 12$.

Прыклад 5. Што больш: $\log_2 3+\log_2 7$ або $\log_2(3+7)$? Па асноўнай уласцівасці лагарыфмаў $\log_2 3+\log_2 7=\log_2 21$. А паколькі $\log_2(3+7)=\log_2 10$ і $10<21$, а аснова лагарыфма 2 большая за 1, то $\log_2 10<\log_2 21$, значыць, $\log_2 3+\log_2 7>\log_2(3+7)$. ●

### *Практыкаванні*

Знайдзіце вобласць вызначэння выразу (499—500).

**499.** а) $\log_\pi(10-5x)$; б) $\log_5(9-x^2)$; в) $\log_3(x-4)$; г) $\log_{0,3}(x^2-16)$.

**500.** а) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; б) $\lg\frac{2x+5}{x-1}$; в) $\log_{0,9}\frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

Параўнайце лікі (501—503).

**501.** а) $\log_2 3{,}8$ і $\log_2 4{,}7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}15$ і $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}2$; в) $\log_3 5{,}1$ і $\log_3 4{,}9$; г) $\log_{0,2} 1{,}8$ і $\log_{0,2} 2{,}1$.

**502.** а) $\log_{\sqrt{2}} 3$ і 1; б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1{,}9$ і $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2{,}5$; в) $\log_\pi 2{,}9$ і 1; г) $\log_{0,7}\sqrt{2}$ і $\log_{0,7} 0{,}3$.

**503.** а) $\log_2 10$ і $\log_5 30$; б) $\log_{0,3} 2$ і $\log_5 3$; в) $\log_3 5$ і $\log_7 4$; г) $\log_3 10$ і $\log_8 57$.

**504.** Пералічыце асноўныя ўласцівасці функцыі і пабудуйце яе графік:

а) $y=\log_3 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; в) $y=\log_4 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

**505.** Знайдзіце вобласць вызначэння выразу:

а) $\log_2 \sin x$; б) $\log_3(2^x - 1)$; в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos x$; г) $\lg(1 - 3^x)$.

**506.** Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \cos \frac{\pi}{12}$;

б) $\log_4(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) + \log_4(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$;

в) $\lg \operatorname{tg} 4 + \lg \operatorname{ctg} 4$; г) $\log_\pi(5 + 2\sqrt{6}) + \log_\pi(5 - 2\sqrt{6})$.

**507.** Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \log_3(x - 2)$; б) $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$;

в) $y = \log_2(x + 1)$; г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2$.

**508.** Рашыце ўраўненне:

а) $\log_3 x = 2 \log_9 6 - \log_9 12$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{0,2} 35 - 2 \log_{0,2} 25\sqrt{7}$;

в) $\log_5 x = \frac{1}{2} \log_3 144 + \log_3 0{,}75$;

г) $\log_\pi x = 3 \log_{0,1} 4 + 2 \log_{0,1} 1\frac{1}{4}$.

**509.** Рашыце графічна ўраўненне:

а) $\lg x = 1 - x$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$;

в) $\log_{\frac{1}{5}} x = x - 6$; г) $\log_2 x = 3 - x$.

**510.** Ці правільна, што лагарыфмічная функцыя:
а) мае экстрэмумы; б) з'яўляецца няцотнай;
в) з'яўляецца перыядычнай; г) з'яўляецца цотнай?

**511.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнне функцыі $f$ на прамежку $I$:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, $I = [1; 4]$;

б) $f(x) = \log_9 x$, $I = \left[\frac{1}{9}; 9\right]$;

в) $f(x) = \log_5 x$, $I = \left[\frac{1}{5}; 1\right]$;

г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $I = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.



## 39. Рашэнне лагарыфмічных ураўненняў і няроўнасцей

Разгледзім найпрасцейшае лагарыфмічнае ўраўненне

$$\log_a x = b.$$

Лагарыфмічная функцыя ўзрастае (або ўбывае) на прамежку $(0; \infty)$ і прымае на гэтым прамежку ўсе сапраўдныя значэнні (рыс. 135). Па тэарэме аб корані (п. 8) адсюль вынікае, што для любога $b$ дадзенае ўраўненне мае і прытым толькі адно рашэнне. З азначэння лагарыфма ліку адразу вынікае, што $a^b$ з'яўляецца такім рашэннем.

Прыклад 1. Рэшым ураўненне $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$.

Дадзенаму ўраўненню задавальняюць тыя значэнні $x$, для якіх выканана роўнасць $x^2 + 4x + 3 = 2^3$. Мы атрымалі квадратнае ўраўненне $x^2 + 4x - 5 = 0$, карані якога роўны 1 і $-5$. Значыць, лікі 1 і 5 — рашэнні дадзенага ўраўнення.

Прыклад 2. Рэшым ураўненне $\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1)$.

Гэта ўраўненне вызначана для тых значэнняў $x$, пры якіх выкананы няроўнасці $2x + 3 > 0$ і $x + 1 > 0$. Для гэтых $x$ дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню $2x + 3 = x + 1$, з якога знаходзім $x = -2$. Лік $x = -2$ не задавальняе, аднак, няроўнасці $x + 1 > 0$. Значыць, дадзенае ўраўненне каранёў не мае.

Гэта ж ураўненне можна рашыць інакш. Пераходзячы да выніку дадзенага ўраўнення $2x + 3 = x + 1$, знаходзім, што $x = -2$. Як заўсёды, пры нераўназначных пераўтварэннях ураўненняў знойдзенае значэнне неабходна праверыць падстаноўкай у зыходнае ўраўненне. У дадзеным выпадку атрымліваем, што роўнасць $\log_5(-1) = \log_5(-1)$ няправільная (яна не мае сэнсу).

Прыклад 3. Рэшым ураўненне $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$.

Гэтаму ўраўненню задавальняюць такія лікі $x$, для якіх выкананы ўмовы: $x > 0$ і $x \neq 1$ ($x$ — аснова лагарыфмічнай функцыі) і роўнасць $x^2 - 2x + 2 = x$, г. зн. $x^2 - 3x + 2 = 0$. Атрыманае квадратнае ўраўненне мае карані 1 і 2. Але $x = 1$ не можа быць рашэннем дадзенага ўраўнення. Значыць, рашэннем дадзенага ўраўнення з'яўляецца толькі лік 2.

Прыклад 4. Рэшым няроўнасць $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2$.

Лік $-2$ роўны $\log_{\frac{1}{3}} 9$. Таму дадзеную няроўнасць можна перапісаць у выглядзе $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Лагарыфмічная функцыя з асновай $\frac{1}{3}$ вызначана і ўбывае на $\boldsymbol{R}_+$, таму што $\frac{1}{3} < 1$. Значыць, другой няроўнасці задавальняюць такія лікі $x$, для якіх выканана ўмова $0 < 5 - 2x < 9$, адкуль $-2 < x < 2{,}5$.

Такім чынам, мноства рашэнняў дадзенай няроўнасці ёсць інтэрвал $(-2; 2{,}5)$.

Прыклад 5. Рэшым ураўненне $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$.

Пяройдзем у другім складаемым да асновы 5 і зробім замену пераменнай $t = \log_5 x$, тады

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Цяпер дадзенае ўраўненне перапішацца ў выглядзе $t^2 - 2t - 3 = 0$. Карані гэтага квадратнага ўраўнення 3 і $-1$. Рашаючы ўраўненні замены $\log_5 x = 3$ і $\log_5 x = -1$, знаходзім $x = 5^3 = 125$ і $x = 5^{-1} = 0{,}2$.

Прыклад 6. Рэшым сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} \lg(y-x) = \lg 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

Першае ўраўненне сістэмы раўназначна ўраўненню $y - x = 2$, а другое — ураўненню $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, прычым $x > 0$ і $y > 0$. Падстаўляючы $y = x + 2$ ва ўраўненне $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, атрымаем $x(x+2) = 48$, адкуль $x^2 + 2x - 48 = 0$, г. зн. $x = -8$ або $x = 6$. Але паколькі $x > 0$, то $x = 6$ і тады $y = 8$. Такім чынам, дадзеная сістэма ўраўненняў мае адно рашэнне: $x = 6$, $y = 8$.

Заўважым яшчэ, што з дапамогай лагарыфмаў можна запісаць корань любога паказальнага ўраўнення віду $a^x = b$, дзе $b > 0$ (чаго мы не маглі яшчэ зрабіць, рашаючы прыклады ў п. 36). Гэтым коранем з'яўляецца лік $x = \log_a b$.

Прыклад 7. Рэшым ураўненне $5^{1-3x} = 7$.

Па азначэнню лагарыфма $1 - 3x = \log_5 7$ і $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_5 7$. ●

## *Практыкаванні*

Рашыце ўраўненні (512—515).

**512.** а) $9^x = 0{,}7$; б) $(0{,}3)^x = 7$; в) $2^x = 10$; г) $10^x = \pi$.

**513.** а) $\log_5 x = 2$; б) $\log_{0,4} x = -1$; в) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; г) $\lg x = 2$.

**514.** а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$; б) $\log_\pi(x^2+2x+3) = \log_\pi 6$;
в) $\log_{0,3}(5+2x) = 1$; г) $\log_2(3-x) = 0$.

**515.** а) $(0{,}2)^{4-x} = 3$; б) $5x^2 = 7$; в) $3^{2-3x} = 8$; г) $7^{2x} = 4$.

Рашыце няроўнасці (516—517).

**516.** а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_{0,5} x > -2$; в) $\log_{0,7} x < 1$; г) $\log_{2,5} x < 2$.

**517.** а) $\log_4(x-2) < 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1$;
в) $\log_5(3x+1) > 2$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < -2$.



Рашыце ўраўненні (518—520).

**518.** а) $\log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5$;
б) $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$;
в) $\log_a x = \log_a 10 - \log_a 2$;
г) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.

**519.** а) $\frac{1}{2}\log_2(x-4) + \frac{1}{2}\log_2(2x-1) = \log_2 3$;
б) $\lg(3x^2+12x+19) - \lg(3x+4) = 1$;
в) $\lg(x^2+2x-7) - \lg(x-1) = 0$;
г) $\log_5(x^2+8) - \log_5(x+1) = 3\log_5 2$.

**520.** а) $\log_4^2 x + \log_4\sqrt{x} - 1{,}5 = 0$; б) $\lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$;
в) $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$; г) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$.

**521.** Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_4(x+y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 34; \\ \log_2 x + \log_2 y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

---

Рашыце ўраўненні (522—524).

**522.** а) $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1$; б) $\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}$;

в) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$; г) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$.

**523.** а) $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$; б) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;

в) $\log_3 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x = 6$; г) $\log_{25} x + \log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{8}$.

**524.** а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;
б) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$;
в) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;
г) $\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

Рашыце няроўнасці (525—528).

**525.** а) $\lg(2x-3) > \lg(x+1)$; б) $\log_{0,3}(2x-4) > \log_{0,3}(x+1)$;
в) $\lg(3x-7) \leqslant \lg(x+1)$; г) $\log_{0,5}(4x-7) < \log_{0,5}(x+2)$.

**526.** а) $\log_{0,5} x > \log_2(3-2x)$; б) $\log_\pi(x+1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$;
в) $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6$; г) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$.

**527.** а) $\log_2^2 x - \log_2 x \leqslant 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 > 0$;
в) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; г) $\log_3^2 x - 9 \leqslant 0$.

**528.** а) $\log_2\left(\sin\frac{x}{2}\right) < -1$; б) $|3 - \log_2 x| < 2$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1$; г) $|3\lg x - 1| < 2$.

Рашыце сістэмы ўраўненняў (529—530).

**529.** а) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2,\\ \log_3^{3}(x-y)=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=2,\\ \log_{48}x+\log_{48}y=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}y=2,\\ \log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}y=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg(x^2+y^2)=1+\lg 13,\\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+\lg 8.\end{cases}$

**530.** а) $\begin{cases}3^y\cdot 9^x=81,\\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50,\\ \lg(x+y)+\lg(x-y)=2-\lg 5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\lg x-\lg y=\lg 15-1,\\ 10^{\lg(3x+2y)}=39.\end{cases}$

## 40. ▽ Паняцце аб адваротнай функцыі

**1. Абарачальнасць функцый.** У ходзе даследавання розных функцый вы неаднаразова рашалі такую задачу: вылічыць значэнне функцыі $f$ па дадзенаму значэнню $x_0$ аргумента. Часта даводзіцца разглядаць і адваротную задачу: знайсці значэнні аргумента, пры якіх функцыя $f$ прымае дадзенае значэнне $y_0$.

○ Прыклад 1. Няхай $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$. Каб знайсці значэнні аргумента $x$, пры якіх $f(x)=y_0$, трэба рашыць ураўненне $f(x)=y_0$, г. зн. ураўненне $kx+b=y_0$. Рашаючы яго, знаходзім, што пры любым $y_0$ яно мае і прытым толькі адно рашэнне $x=\frac{y_0-b}{k}$.

Прыклад 2. Для функцыі $f(x)=x^2$ ураўненне $f(x)=y_0$ пры $y_0>0$ мае два рашэнні: $x_1=\sqrt{y_0}$, $x_2=-\sqrt{y_0}$. (Калі $y_0=0$, рашэнне адно: $x_0=0$.) ●

Функцыю, якая прымае кожнае сваё значэнне ў адзіным пункце вобласці вызначэння, называюць *абарачальнай*. Такім чынам, пры $k\neq 0$ функцыя $f(x)=kx+b$ абарачальная, а функцыя $f(x)=x^2$ (якая вызначана на ўсёй лікавай прамой) не з'яўляецца абарачальнай.

Заўвага. З азначэння абарачальнай функцыі адразу вынікае, што калі $f$ абарачальная, а лік $a$ належыць вобласці значэнняў $E(f)$, то ўраўненне $f(x)=a$ мае рашэнне і прытым толькі адно.

**2. Адваротная функцыя.** Няхай $f$ — адвольная абарачальная функцыя. Для любога ліку $y_0$ з яе вобласці значэнняў $E(f)$ ёсць у дакладнасці адно значэнне $x_0$, якое належыць вобласці вызначэння $D(f)$, такое, што $f(x_0)=y_0$. Паставіўшы ў адпаведнасць кожнаму $y_0$ гэта значэнне $x_0$, атрымаем новую функцыю $g$ з вобласцю вызначэння $E(f)$ і вобласцю значэнняў $D(f)$. Напрыклад, для



абарачальнай функцыі $f(x)=kx+b$ $(k\neq 0)$ значэнне новай функцыі $g$ у адвольным пункце $y_0$ задаецца формулай

$$g(y_0)=\frac{y_0-b}{k}.$$

Выбіраючы для аргумента функцыі $g$ прывычнае абазначэнне $x$, знаходзім, што

$$g(x)=\frac{x-b}{k}.$$

Калі функцыя $g$ у кожным пункце $x$ вобласці значэнняў абарачальнай функцыі $f$ прымае такое значэнне $y$, што $f(y)=x$, то гавораць, што функцыя $g$ — *адваротная функцыя да* $f$.

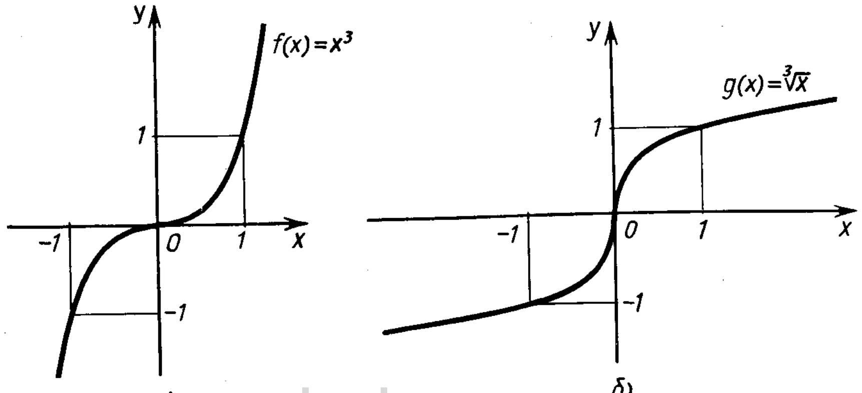
Як паказана вышэй, функцыяй, адваротнай да функцыі $f(x)=kx+b(k\neq 0)$, з'яўляецца функцыя $g(x)=\frac{x-b}{k}$. Разгледзім яшчэ адзін прыклад.

○ Прыклад 3. Дакажам, што функцыя $f(x)=x^3$ абарачальная, і выведзем формулу, якая задае функцыю $y=g(x)$, адваротную да $f$.

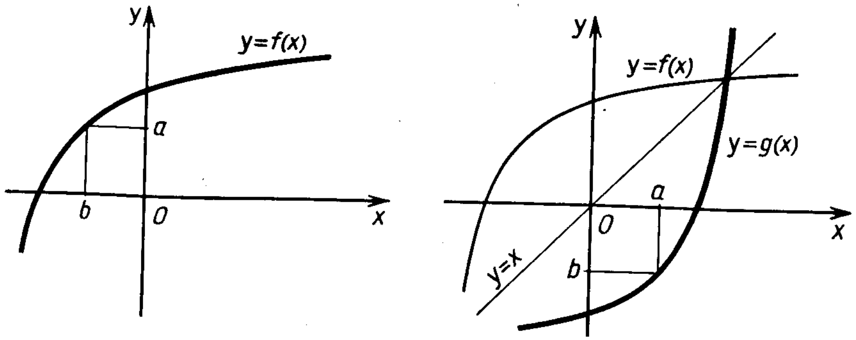
Па азначэнню адваротнай функцыі спачатку трэба даказаць, што ўраўненне $f(y)=x$ пры любым значэнні $x$ мае адзінае рашэнне $y$. У дадзеным выпадку гэта ўраўненне $y^3=x$, якое мае адзінае рашэнне $y=\sqrt[3]{x}$ пры любым $x$ (гл. п. 8). Таму функцыя $f(x)=x^3$ абарачальная і адваротнай да яе з'яўляецца функцыя $g(x)=\sqrt[3]{x}$. Графікі гэтых функцый дадзены на рысунку 138. ●

Калі зададзены графік абарачальнай функцыі $f$, то графік функцыі $g$, адваротнай да $f$, няцяжка пабудаваць, карыстаючыся наступным сцверджаннем:

*Графікі функцыі $f$ і адваротнай да яе функцыі $g$ сіметрычныя адносна прамой $y=x$.*




а) Рыс. 138 б)




Рыс. 139

Дакажам гэту ўласцівасць. Заўважым, што па графіку функцыі $f$ можна знайсці лікавае значэнне адваротнай да $f$ функцыі $g$ у адвольным пункце $a$. Для гэтага трэба ўзяць пункт з каардынатай $a$ не на гарызантальнай восі (як гэта звычайна робіцца), а на вертыкальнай. З азначэння адваротнай функцыі вынікае, што значэнне $g(a)$ роўна $b$ (рыс. 139, $a$).

Такім чынам, калі лічыць, што выбрана некалькі незвычайная сістэма каардынат (аргумент адкладваецца на вертыкальнай восі, а значэнні функцыі — на гарызантальнай), то можна сказаць, што графік адваротнай да $f$ функцыі $g$ — гэта графік функцыі $f$ (пабудаванай у звычайнай сістэме каардынат). Для таго каб паказаць графік $g$ у звычайнай сістэме каардынат, трэба адлюстраваць графік $f$ адносна прамой $y=x$ (рыс. 139, $б$).

Калі функцыя $g$ — адваротная да функцыі $f$, то функцыя $g$ абарачальная і адваротнай да яе з'яўляецца функцыя $f$. Таму гавораць, што функцыі $f$ і $g$ *узаемна адваротныя*.

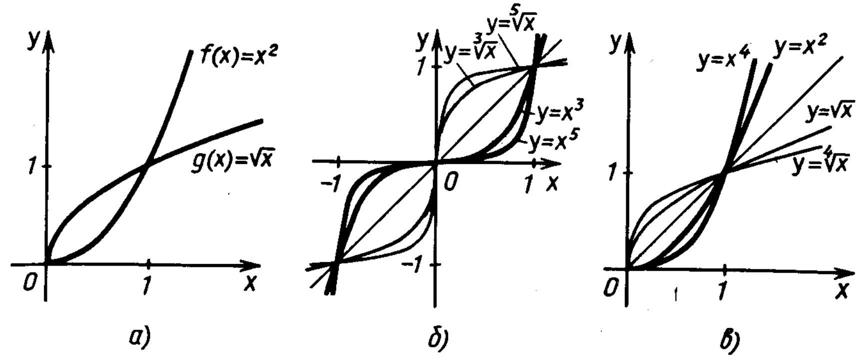
Тэарэма *(аб адваротнай функцыі)*. ***Калі функцыя $f$ узрастае (ці ўбывае) на прамежку $I$, то яна абарачальная. Адваротная да $f$ функцыя $g$, вызначаная ў вобласці значэнняў $f$, таксама з'яўляецца ўзрастаючай (адпаведна ўбываючай).***

Доказ. Прымем для пэўнасці, што функцыя $f$ узрастаючая. Абарачальнасць функцыі $f$ — відавочны вынік тэарэмы аб корані (гл. п. 8). Таму застаецца даказаць, што функцыя $g$, адваротная да $f$, узрастае на мностве $E(f)$.

Няхай $x_1$ і $x_2$ — адвольныя значэнні з $E(f)$, такія, што $x_2>x_1$, і няхай $y_1=g(x_1)$, $y_2=g(x_2)$. Па азначэнню адваротнай функцыі $x_1=f(y_1)$ і $x_2=f(y_2)$.

Скарыстаўшы тую ўмову, што $f$ — узрастаючая функцыя, знаходзім, што дапушчэнне $y_1 \geqslant y_2$ прыводзіць да вываду $f(y_1)\geqslant f(y_2)$, г. зн. $x_1 \geqslant x_2$. Гэта супярэчыць дапушчэнню $x_2>x_1$. Таму $y_2>y_1$, г. зн. з умовы $x_2>x_1$ вынікае, што $g(x_2)>g(x_1)$. Менавіта гэта і трэба было даказаць.






Рыс. 140

○ Прыклад 4. Як адзначалася вышэй, функцыя $f(x)=x^2$ не з'яўляецца абарачальнай. Аднак функцыя $f^*$, вызначаная на прамежку $[0;\ \infty)$ формулай $f^*(x)=x^2$, узрастае на гэтым прамежку і, значыць, мае адваротную. Адваротнай да функцыі $f^*$ з'яўляецца функцыя $g(x)=\sqrt{x}$. Графікі гэтых функцый дадзены на рысунку 140, $a$. ●

Наогул функцыя $f(x)=x^n$ пры любым натуральным $n$ узрастае на прамежку $[0;\ \infty)$ і таму мае адваротную. Адваротнай да функцыі $f(x)=x^n$ з'яўляецца функцыя $g(x)=\sqrt[n]{x}$. Графікі гэтых функцый пры некаторых значэннях $n$ паказаны на рысунку 140, $б$, $в$.

### *Практыкаванні*

Выведзіце формулу, якая задае функцыю $g$, адваротную да дадзенай функцыі $f$. Запішыце вобласць вызначэння і вобласць значэнняў функцыі $g$ (531—532).

**531.** а) $f(x)=2x+1$; б) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$;

в) $f(x)=-2x+1$; г) $f(x)=-\frac{1}{2}x-1$.

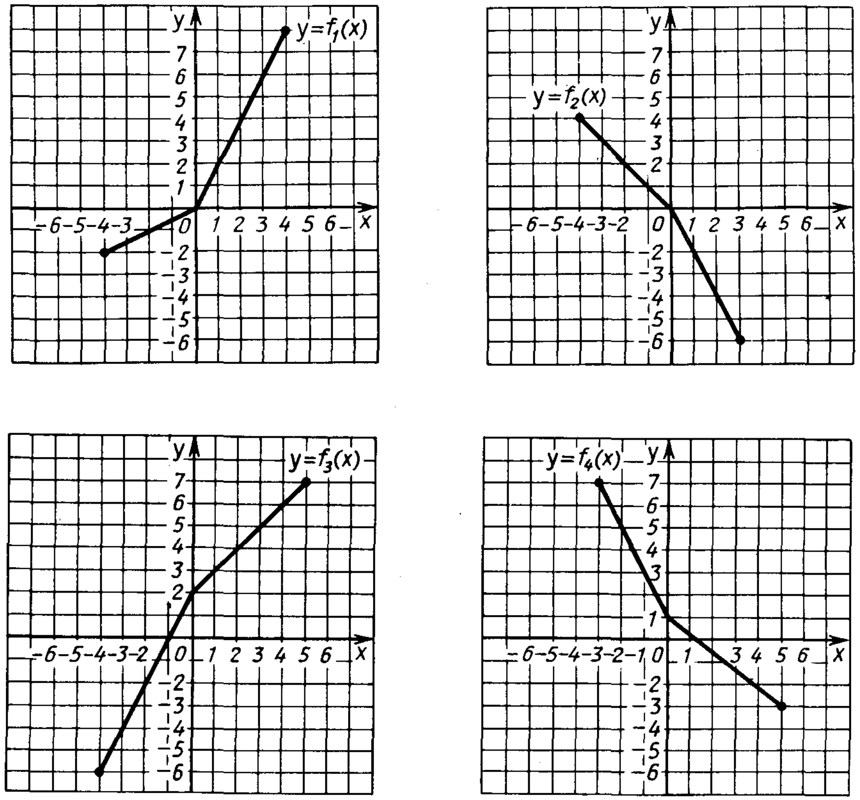
**532.** а) $f(x)=-\frac{1}{x}$; б) $f(x)=2x^2 (x\geqslant 0)$;

в) $f(x)=\frac{x}{x+2}$; г) $f(x)=\sqrt{x+1}$.

**533.** Пабудуйце графік функцыі, адваротнай да $f$:

а) $f(x)=2x^3+1$; б) $f(x)=(x+1)^2,\ x\in(-\infty;\ -1]$;
в) $f(x)=-2x^3+1$; г) $f(x)=(x-1)^2,\ x\in[1;\ \infty)$.

**534.** Па графіку функцыі $f$ (на рыс. 141) знайдзіце значэнні адваротнай да $f$ функцыі $g$ у пунктах $-2$, 1 і 3. Пабудуйце




Рыс. 141

графік функцыі $g$, запішыце яе вобласць вызначэння і вобласць значэнняў:

а) $f(x)=f_1(x)$; б) $f(x)=f_2(x)$; в) $f(x)=f_3(x)$; г) $f(x)=f_4(x)$.

Дакажыце, што функцыя $f$ мае адваротную на дадзеным прамежку. Пабудуйце графік функцыі, адваротнай да $f$ (535—536).

**535.** а) $f(x)=x^2+1,\ x\leqslant 0$; б) $f(x)=2x,\ (-\infty;\ \infty)$;

в) $f(x)=\sqrt[4]{x},\ x\geqslant 0$; г) $f(x)=x^3+1,\ (-\infty;\ \infty)$.

**536.** а) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; б) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $f(x)=\cos x,\ x\in[0;\ \pi]$; г) $f(x)=\operatorname{ctg} x,\ x\in(0;\ \pi)$.

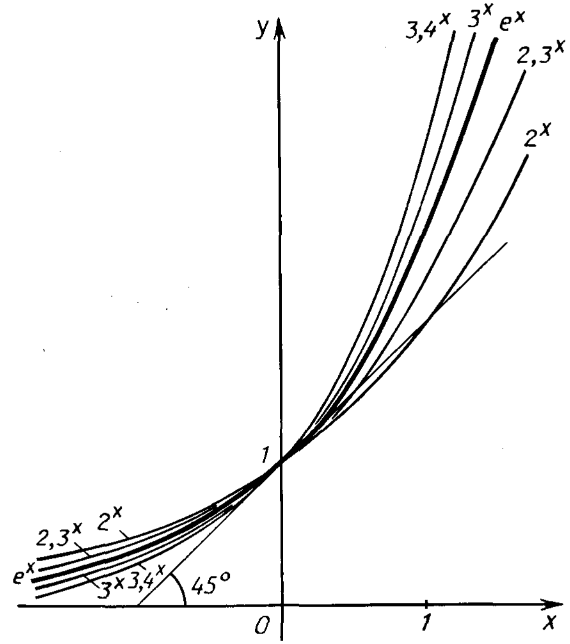


# § 11. ВЫТВОРНАЯ ПАКАЗАЛЬНАЙ І ЛАГАРЫФМІЧНАЙ ФУНКЦЫЙ

## 41. Вытворная паказальнай функцыі

**1. Лік *e*.** У папярэдніх пунктах графікі паказальнай функцыі даваліся ў выглядзе гладкіх ліній (без зломаў), да якіх у кожным пункце можна правесці датычную. Але існаванне датычнай да графіка функцыі ў пункце з абсцысай $x_2$ раўназначна яе дыферэнцыруемасці ў $x_0$. Таму натуральна дапусціць, што паказальная функцыя дыферэнцыруемая ва ўсіх пунктах вобласці вызначэння.

Нарысуем некалькі графікаў функцыі $y=a^x$ для $a$, роўнага 2; 2,3; 3; 3,4 (рыс. 142), і правядзём да іх датычныя ў пункце з абсцысай 0. Вуглы нахілу гэтых датычных да восі абсцыс прыблізна роўныя 35, 40, 48 і 51° адпаведна, г. зн. з узрастаннем $a$ вуглавы каэфіцыент датычнай да графіка функцыі $y=a^x$ у пункце $M(0;\ 1)$ паступова павялічваецца ад $\operatorname{tg} 35°$ да $\operatorname{tg} 51°$. Уяўляецца відавочным, што, павялічваючы $a$ ад 2 да 3, мы знойдзем такое значэнне $a$, пры якім вуглавы каэфіцыент адпаведнай датычнай роўны 1 (г. зн. вугал нахілу роўны 45°). Вось дакладная фармулёўка гэтага сказа (мы прымаем яго без доказу):




Рыс. 142

*Існуе такі лік, большы за 2 і меншы за 3* (гэты лік абазначаюць літарай $e$), *што паказальная функцыя* $y=e^x$ *у пункце* 0 *мае вытворную, роўную* 1, г. зн.

$$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to 1 \text{ пры } \Delta x\to 0. \quad (1)$$

Заўвага. Даказана, што лік $e$ ірацыянальны і таму запісваецца ў выглядзе бесканечнага дзесятковага неперыядычнага дробу. З дапамогай электронных вылічальных машын знойдзена больш за дзве тысячы дзесятковых знакаў ліку $e$. Першыя знакі такія: $e=2{,}718281828459045\ldots$.

Функцыю $e^x$ часта называюць *экспанентай.*

**2. Формула вытворнай паказальнай функцыі.**

Тэарэма 1. ***Функцыя $e^x$ дыферэнцыруемая ў кожным пункце вобласці вызначэння, і***

$$(e^x)'=e^x.$$

Доказ. Знойдзем спачатку прырашчэнне функцыі $y=e^x$ у пункце $x_0$:

$$\Delta y=e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}=e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}=e^{x_0}(e^{\Delta x}-1).$$

Карыстаючыся ўмовай (1), знаходзім:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to e^{x_0} \text{ пры } \Delta x\to 0.$$

Па азначэнню вытворнай адсюль вынікае, што $y'=e^x$, г. зн. $(e^x)'=e^x$ пры любым $x$.

Прыклад 1. Знойдзем вытворную функцыі $y=e^{5x}$:

$$(e^{5x})'=e^{5x}\cdot(5x)'=5e^{5x}.$$

Лік $e$ дадатны і адрозніваецца ад 1, таму вызначаны лагарыфмы па аснове $e$.

Азначэнне. ***Натуральным лагарыфмам*** (абазначаецца ln) **называецца лагарыфм па аснове *e*:**

$$\ln x=\log_e x. \quad (2)$$

Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці для любога дадатнага ліку $e^{\ln a}=a$. Таму $a^x$ можа быць запісана ў выглядзе

$$a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}. \quad (3)$$

Выведзем формулу вытворнай паказальнай функцыі пры адвольным значэнні $a$.

Тэарэма 2. ***Паказальная функцыя $a^x$ дыферэнцыруемая ў кожным пункце вобласці вызначэння, і***

$$(a^x)'=a^x\ln a. \quad (4)$$

Доказ. З формулы (3) па тэарэме аб вытворнай складанай функцыі атрымліваем, што паказальная функцыя дыферэнцыруемая ў кожным пункце

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a. \quad (5)$$



Вынік. *Паказальная функцыя непарарыўная ў кожным пункце сваёй вобласці вызначэння,* г. зн. $a^x\to a^{x_0}$ *пры* $x\to x_0$.

Гэта вынікае з дыферэнцыруемасці паказальнай функцыі і лемы аб непарарыўнасці дыферэнцыруемай функцыі (гл. с. 111).

Прыклад 2. Знойдзем вытворныя функцый $y=2^x$ і $y=5^{-3x}$.

Па формуле (4) маем: $(2^x)'=2^x\ln 2$; $(5^{-3x})'=(-3)\cdot 5^{-3x}\ln 5$.

Прыклад 3. Даследуем функцыю $f(x)=xe^x$ на ўзрастанне (убыванне) і экстрэмум.

Знойдзем вытворную гэтай функцыі:

$$f'(x)=(xe^x)'=x'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=e^x(1+x).$$

Паколькі $e^x>0$ для любога $x$, знак $f'$ супадае са знакам $(1+x)$. Значыць, $f'(x)>0$ на прамежку $(-1;\ \infty)$, таму $f$ узрастае на прамежку $[-1;\ \infty)$. На прамежку $(-\infty;\ -1)$ маем $f'(x)<0$, таму $f$ убывае на $(-\infty;\ -1]$. У пункце $x_0=-1$ вытворная мяняе знак з мінуса на плюс, і, значыць, $x_0=-1$ з'яўляецца пунктам мінімуму.

Графік функцыі прыведзены на рысунку 143.

**3. Першавобразная паказальнай функцыі.**

Тэарэма 3. ***Першавобразнай для функцыі $a^x$ на R з'яўляецца функцыя*** $\frac{a^x}{\ln a}$.

Сапраўды, $\ln a$ — пастаянная, і таму

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(a^x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x\ln a=a^x$$

пры любым $x$. Гэтым даказана, што $\frac{a^x}{\ln a}$ ёсць першавобразная для $a^x$ на $\mathbf{R}$. А з роўнасці $(e^x)'=e^x$ для ўсіх $x$ вынікае, што $e^x$ ёсць першавобразная для $e^x$ на $\mathbf{R}$.

Прыклад 4. Знойдзем першавобразныя для функцый:

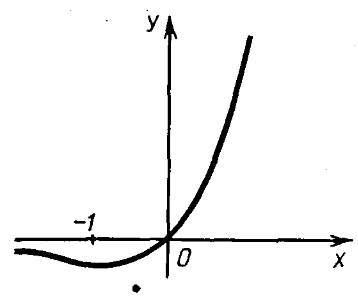
а) $f(x)=5^x$; б) $g(x)=4\cdot 2^x$;
в) $h(x)=4e^{3x}-10\cdot 0{,}6^x$.

Карыстаючыся тэарэмай 3 і правіламі знаходжання першавобразных, выпісваем адказы:

а) $F(x)=\frac{5^x}{\ln 5}+C$;

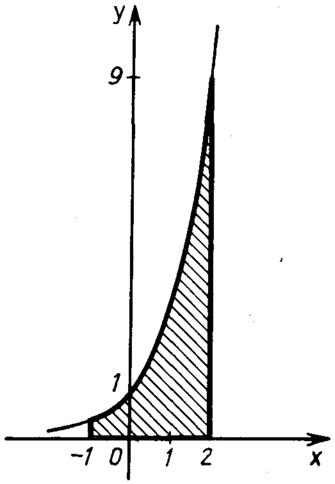
б) $G(x)=\frac{4\cdot 2^x}{\ln 2}+C$;

в) $H(x)=\frac{4}{3}e^{3x}-10\cdot\frac{0{,}6^x}{\ln 0{,}6}+C$.



Рыс. 143

Прыклад 5. Знойдзем плошчу фігуры, абмежаванай лініямі $y=3^x$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$.




Рыс. 114

Дадзеная фігура ёсць крывалінейная трапецыя (рыс. 144). Таму яе плошчу $S$ знаходзім па формуле плошчы крывалінейнай трапецыі:

$$S=\int_{-1}^{2}3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{9}{\ln 3}-\frac{3^{-1}}{\ln 3}=\frac{26}{3\ln 3}. \bullet$$

### *Практыкаванні*

**537.** Знайдзіце па табліцах натуральных лагарыфмаў (або з дапамогай калькулятара):

а) ln 3, ln 5,6, ln 1,7;
б) ln 8, ln 17, ln 1,3;
в) ln 2, ln 35, ln 1,4;
г) ln 7, ln 23, ln 1,5.

Знайдзіце вытворную кожнай з функцый (538—539).

**538.** а) $y=4e^x+5$; б) $y=2x+3e^{-x}$;
в) $y=3-\frac{1}{2}e^x$; г) $y=5e^{-x}-x^2$.

**539.** а) $y=e^x\cos x$; б) $y=3e^x+2^x$;
в) $y=3^x-3x^2$; г) $y=x^2e^x$.

**540.** Напішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f$ у пункце з абсцысай $x_0$:

а) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=0$; б) $f(x)=3^x$, $x_0=1$;
в) $f(x)=e^x$, $x_0=0$; г) $f(x)=2^{-x}$, $x_0=1$.

**541.** Знайдзіце агульны выгляд першавобразнай для функцыі:

а) $f(x)=5e^x$; б) $f(x)=2\cdot 3^x$; в) $f(x)=4^x$;
г) $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1$.

**542.** Вылічыце інтэграл:

а) $\int_0^1 0{,}5^x dx$; б) $\int_0^1 e^{2x}dx$;
в) $\int_{-2}^{1} 2^x dx$; г) $\int_{-\frac{1}{2}}^{2} 3^x dx$.

Знайдзіце вытворную кожнай з функцый (543—544).

**543.** а) $y=e^{x^2}\sin\frac{x}{2}$; б) $y=7^{\frac{x}{2}}\operatorname{tg}3x$;
в) $y=e^{\sqrt{x}}\cos 2x$; г) $y=2^{-x}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

**544.** а) $y=\frac{x^6}{4^x+5}$; б) $y=\frac{e^{-x}}{x^2+2}$;
в) $y=\frac{3^x}{2^x+5^x}$; г) $y=\frac{0{,}3^{-x}}{\sqrt{x}+0{,}5}$.

**545.** Даследуйце на ўзрастанне (убыванне) і экстрэмумы функцыю:

а) $f(x)=xe^{5x}$; б) $f(x)=x^2 2^{-x}$; в) $f(x)=xe^{-x}$; г) $f(x)=x^4 0{,}5^x$.

**546.** Знайдзіце агульны выгляд першавобразнай для функцыі:

а) $f(x)=e^{3-2x}$; б) $f(x)=2\cdot 0{,}9^x-5{,}6^{-x}$;
в) $f(x)=2^{-10x}$; г) $f(x)=e^{3x}+2{,}3^{1+x}$.

Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі (547—548).

**547.** а) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$; б) $y=3^x$, $y=9^x$, $x=1$;
в) $y=2^x$; $y=0$, $x=-1$, $x=2$; г) $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$.

**548.** а) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=3$, $x=1$;
б) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=e$;
в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=1$, $x=-2$;
г) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=4^x$, $y=4$.

## 42. Вытворная лагарыфмічнай функцыі

Пакажам спачатку, што лагарыфмічная функцыя можа дыферэнцыравацца ў кожным пункце. Графікі функцый $y=\log_a x$ і $y=a^x$ сіметрычныя адносна прамой $y=x$. Паколькі паказальная функцыя дыферэнцыруемая ў любым пункце, а яе вытворная не ператвараецца ў нуль, графік паказальнай функцыі мае негарызантальную датычную ў кожным пункце. Таму і графік лагарыфмічнай функцыі мае невертыкальную датычную ў любым пункце. А гэта раўназначна дыферэнцыруемасці лагарыфмічнай функцыі на яе вобласці вызначэння.

Дакажам цяпер, што *вытворная лагарыфмічнай функцыі* для любога $x$ з вобласці вызначэння знаходзіцца па формуле

$$\ln' x=\frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці $x=e^{\ln x}$ пры ўсіх дадатных $x$, г. зн. у гэтай роўнасці справа і злева стаіць адна і тая ж функцыя (вызначаная на $R_+$). Таму вытворныя $x$ і $e^{\ln x}$ роўныя, г. зн.

$$x'=(e^{\ln x})'. \qquad (2)$$

Вядома, што $x' = 1$. Вытворную правай часткі вылічваем па правілу знаходжання вытворнай складанай функцыі і тэарэме 1 (п. 41): $(e^{\ln x})' = e^{\ln x}\ln' x = x \ln' x$. Падстаўляючы знойдзеныя вытворныя ў роўнасць (2), знаходзім $1 = x \ln' x$, адкуль $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Прыклад 1. Знойдзем вытворныя функцый: а) $y = \ln(5 + 2x)$; б) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_7 2x$.

а) $(\ln(5+2x))' = \frac{1}{5+2x} \cdot (5+2x)' = \frac{2}{5+2x}$;

б) $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$;

в) $(\log_7 2x)' = \left(\frac{\ln 2x}{\ln 7}\right)' = \frac{2}{2x \ln 7} = \frac{1}{x \ln 7}$.

Прыклад 2. Даследуем функцыю $f(x) = x^2 \ln x$ на ўзрастанне, убыванне, экстрэмум і пабудуем яе графік.

Функцыя вызначана пры $x > 0$. Знойдзем яе вытворную:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = 2x\left(\ln x + \frac{1}{2}\right).$$

$x > 0$, таму знак вытворнай супадае са знакам $\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)$. Адсюль вынікае, што $f'(x) > 0$ на прамежку $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};\ \infty\right)$, і таму на прамежку $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};\ \infty\right)$ функцыя ўзрастае; на прамежку $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ вытворная адмоўная, таму $f$ убывае на прамежку $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$. У пункце $\frac{1}{\sqrt{e}}$ вытворная мяняе знак з мінуса на плюс, значыць, гэта пункт мінімуму; $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$. Графік функцыі прыведзены на рысунку 145.

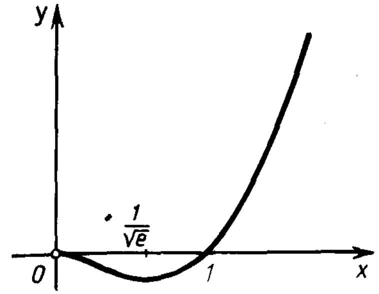
Формула (1) паказвае, *што для функцыі* $\frac{1}{x}$ *на прамежку* $(0;\ \infty)$ *любая першаабразная можа быць запісана ў выглядзе* $\ln x + C$.

Функцыя $\frac{1}{x}$ мае першаабразную і на прамежку $(-\infty;\ 0)$, гэта функцыя $\ln(-x)$. Сапраўды,

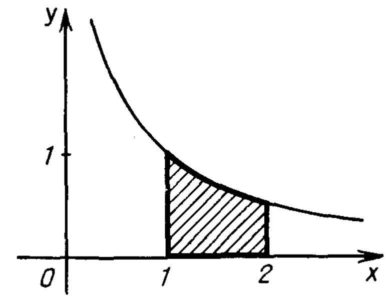
$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Паколькі $|x| = x$ пры $x > 0$ і $|x| = -x$ пры $x < 0$, мы даказалі, што *на любым прамежку, які не змяшчае пункт* 0, *першаабразнай для функцыі* $\frac{1}{x}$ *з'яўляецца функцыя* $\ln|x|$.






Рыс. 145




Рыс. 146

Прыклад 3. Для функцыі $\frac{1}{x+3}$ першаабразныя роўны $\ln|x+3| + C$ (на любым прамежку, які не змяшчае пункт $-3$).

Для функцыі $\frac{1}{5x+7}$ агульны выгляд першаабразных $\frac{1}{5}\ln|5x + 7| + C$ $\left(\text{на любым прамежку, які не змяшчае пункт } -\frac{7}{5}\right)$.

Прыклад 4. Знойдзем плошчу фігуры, абмежаванай лініямі $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ (рыс. 146).

Паколькі $\ln x$ пры $x > 0$ ёсць першаабразная для $\frac{1}{x}$, плошча крывалінейнай трапецыі, якая нас цікавіць, роўна $S = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

### *Практыкаванні*

Знайдзіце вытворную кожнай з функцый (549—550).

**549.** а) $y = \lg(2 + 3x)$; б) $y = \log_{0,3} x + \sin x$;
в) $y = \ln(1 + 5x)$; г) $y = \lg x - \cos x$.

**550.** а) $y = x^2 \log_2 x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$;
в) $y = x \ln x$; г) $y = \frac{x}{\ln x}$.

**551.** Знайдзіце агульны выгляд першаабразнай для функцыі:
а) $f(x) = \frac{3}{7x+1}$; б) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+5}$;
в) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; г) $f(x) = \frac{4}{x}$.

**552.** Напішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f$ у пункце з абсцысай $x_0$, калі:
а) $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = \lg x + 2$, $x_0 = 1$;
в) $f(x) = 2 \ln x$, $x_0 = e$; г) $f(x) = \log_2(x-1)$, $x_0 = 2$.

**553.** Вылічыце інтэграл:

а) $\int_1^7 \frac{2dx}{x}$; б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}$; в) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{3x+1}$.

---

**554.** Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y=\frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$; б) $y=\frac{\sqrt{x}}{\lg(1-2x)}$;

в) $y=\frac{x^2}{\ln 5x}$; г) $y=\frac{\log_3 x^2}{x+1}$.

Даследуйце функцыі на ўзрастанне (убыванне) і экстрэмумы (555—556).

**555.** а) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; б) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

в) $f(x)=2x-\ln x$; г) $f(x)=x\ln x$.

**556.** а) $f(x)=x\ln^2 x$; б) $f(x)=\frac{2x}{\lg x}$;

в) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; г) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

**557.** Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі:

а) $y=\frac{4}{x}+2,\ y=0,\ x=2,\ x=6$;

б) $y=-\frac{2}{x},\ y=0,\ x=-4,\ x=-1$;

в) $y=\frac{1}{2x},\ y=0,\ x=\frac{1}{4},\ x=2$;

г) $y=3-\frac{1}{x},\ y=0,\ x=-6,\ x=-3$.

## 43. Ступенная функцыя

**1. Ступенная функцыя і яе вытворная.** Вы ўжо ведаеце, што для любога сапраўднага ліку $\alpha$ і кожнага дадатнага $x$ вызначаны лік $x^\alpha$. Зафіксуем лік $\alpha$ на прамежку $(0;\ \infty)$.

Азначэнне. **Функцыя, зададзеная формулай $f(x)=x^\alpha$, называецца *ступеннай* (з паказчыкам ступені $\alpha$).**

Калі $\alpha>0$, то ступенная функцыя вызначана і пры $x=0$, паколькі $0^\alpha=0$. Пры цэлых $\alpha$ формулай $f(x)=x^\alpha$ ступенная функцыя $f$ вызначана і для $x<0$. Пры цотных $\alpha$ гэта функцыя цотная, а пры няцотных $\alpha$ — няцотная. Таму даследаванне ступеннай функцыі дастаткова правесці толькі на прамежку $(0;\ \infty)$.

У папярэдніх раздзелах курса былі атрыманы формулы для вытворнай функцыі $y=x^\alpha$ толькі пры цэлых паказчыках ступені, а таксама $\alpha=\frac{1}{2}$. Цяпер нам застаецца вывесці формулу пры



адвольным $\alpha$. Дакажам, што для любога $x$ з вобласці вызначэння вытворная ступеннай функцыі знаходзіцца так:

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

Сапраўды, паколькі $x=e^{\ln x}$, то $x^\alpha=e^{\alpha\lg x}$. Адсюль па правілу вылічэння вытворнай складанай функцыі атрымліваем:

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Формула (1) даказана.

Пры $\alpha<0$ ступенная функцыя ўбывае на прамежку $(0;\ \infty)$, паколькі $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}<0$ пры $x>0$. Пры $\alpha>0$ маем $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}>0$, таму ступенная функцыя ўзрастае пры $x>0$. Акрамя таго, трэба ўлічыць, што пры $x=0$ ступенная функцыя роўна 0 і $x^\alpha\to 0$ пры $x\to 0$ і $x>0$. Таму пункт 0 далучаецца да прамежку ўзрастання, г. зн. пры $\alpha>0$ ступенная функцыя ўзрастае на прамежку $[0;\ \infty)$. Прыклады графікаў ступеннай функцыі пры розных $\alpha$ прыведзены на рысунку 147.

З формулы (1) вынікае, што вытворнай ступеннай функцыі $f(x)=x^\alpha$ з'яўляецца ступенная функцыя ($f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$). Іншая справа з першавобразнай ступеннай функцыі.

Пры $\alpha\neq-1$ агульны выгляд першавобразных ступеннай функцыі $f(x)=x^\alpha$, як лёгка праверыць, такі: $F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Пры $\alpha=-1$, як вядома, першавобразнай функцыі $f$ з'яўляецца функцыя $F(x)=\ln|x|+C$.

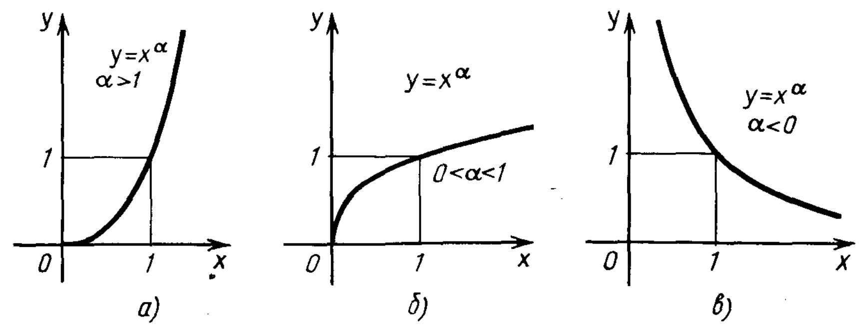
**2. Вылічэнне значэнняў ступеннай функцыі.** Выведзем прыбліжаную формулу

$$(1+\Delta x)^\alpha\approx 1+\alpha\Delta x. \qquad (2)$$

Разгледзім функцыю $f(x)=x^\alpha$ і скарыстаем прыбліжаную формулу

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x, \qquad (3)$$

якая вядома з п. 20, пры $x_0=1$ і $x=1+\Delta x$. Маем $f(x_0)=f(1)=1$




Рыс. 147

і $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, адкуль $f'(x_0)=f'(1)=\alpha\cdot 1^{\alpha-1}=\alpha$. Па формуле (3)

$$f(x)=(1+\Delta x)^{\alpha}\approx 1+\alpha\Delta x.$$

Часцей за ўсё гэту формулу скарыстоўваюць для вылічэння каранёў. Лічачы, што $\alpha=\frac{1}{n}$, знаходзім:

$$\sqrt[n]{1+\Delta x}=(1+\Delta x)^{\frac{1}{n}}\approx 1+\frac{\Delta x}{n}. \qquad (4)$$

Прыклад. Вылічым прыбліжаныя значэнні: а) $\sqrt[4]{1{,}08}$; б) $\sqrt[3]{27{,}03}$; в) $\sqrt[10]{1000}$.

Скарыстаем формулу (4):

а) $\sqrt[4]{1{,}08}=(1+0{,}08)^{\frac{1}{4}}\approx 1+\frac{1}{4}\cdot 0{,}08=1{,}02$;

б) $\sqrt[3]{27{,}03}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{0{,}03}{27}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{0{,}03}{27}}\approx$ $\approx 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}03}{27}\right)\approx 3{,}0011$. (Значэнне $\sqrt[3]{27{,}03}$ з васьмю знакамі пасля коскі такое: $\sqrt[3]{27{,}03}\approx 3{,}0011107$.)

в) Заўважым, што $2^{10}=1024$. Маем:

$$\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}=2\cdot\sqrt[10]{1-\frac{24}{2^{10}}}\approx 2\left(1-\frac{24}{10\cdot 2^{10}}\right)\approx 1{,}995.$$

### *Практыкаванні*

Пабудуйце графік функцыі $f$ і знайдзіце яе вытворную (558—559).

**558.** а) $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}$; б) $f(x)=x^{\sqrt{3}}$;
в) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$; г) $f(x)=x^{-\sqrt{5}}$.

**559.** а) $f(x)=x^{-e}$; б) $f(x)=\left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5}$;
в) $f(x)=x^{\pi}$; г) $f(x)=(2x)^{\ln 3}$.

Вылічыце з дапамогай формулы (4) прыбліжаныя значэнні (560—561).

**560.** а) $24^{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[4]{625\cdot 3}$; в) $\sqrt[3]{81}$; г) $\sqrt[4]{48}$.

**561.** а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[4]{90}$; в) $\sqrt{9{,}02}$; г) $\sqrt[5]{33}$.

**562.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f$ на прамежку $I$:

а) $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$, $I=[1;\ 32]$; б) $f(x)=x^{-\frac{4}{3}}$; $I=\left[\frac{1}{8};\ 27\right]$;

в) $f(x)=x^{-4}$, $I=\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$; г) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$, $I=\left[\frac{1}{16};\ 81\right]$.

**563.** Знайдзіце агульны выгляд першавобразнай для функцыі:

а) $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}$; б) $f(x)=x^{2\sqrt{3}}$;
в) $f(x)=3x^{-1}$; г) $f(x)=x^{e}$.

**564.** Вылічыце інтэграл:

а) $\int_1^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx$; б) $\int_1^8 \frac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}}$; в) $\int_e^{e^2} 2x^{-1}dx$; г) $\int_{16}^{81} 5x^{\frac{1}{\pi}}\,dx$.

**565.** Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі:

а) $y=x^{\sqrt{2}}$, $y=0$, $x=1$; б) $y=x^{\sqrt{3}}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=\frac{1}{2}$;

в) $y=x^{-0,8}$, $y=0$, $x=1$, $x=32$; г) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=3$, $x=5$.

**566.** На міліметровай паперы пабудуйце графікі функцый $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$ $(x\geqslant 0)$.

1) Знайдзіце з дапамогай графіка прыбліжаныя значэнні:

а) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2{,}5}$; в) $\sqrt[3]{2{,}5}$, $\sqrt[4]{3}$; г) $\sqrt{2{,}5}$, $\sqrt[4]{2}$.

2) Знайдзіце значэнні гэтых каранёў з дапамогай калькулятара.

3) Вылічыце іх прыбліжаныя значэнні, карыстаючыся формулай (4). Указанне. $2{,}5=1{,}6^2-0{,}06$; $2{,}5=1{,}3^3+0{,}303$; $2{,}5=1{,}25^4+\frac{15}{256}$; $2=1{,}4^2+0{,}04$; $3=1{,}4^3+0{,}256$, $3=1{,}3^4=0{,}1439$.

4) Параўнайце атрыманыя рэзультаты.

**567.** Ці правільна, што функцыя $f(x)=x^{\sqrt{5}}$ уладае ўласцівасцю:
а) у вобласці вызначэння можна знайсці адрэзак, на канцах якога функцыя прымае значэнні розных знакаў;
б) з'яўляецца цотнай; в) мае экстрэмумы;
г) існуе пункт $x_0$, у якім функцыя прымае найменшае значэнне.

## 44. Паняцце аб дыферэнцыяльных ураўненнях

**1. Непасрэднае інтэграванне.** У ходзе рашэння задач прыродазнаўства часта ўзнікаюць суадносіны, якія звязваюць вытворныя некаторай функцыі (першую, другую і г. д.), саму гэту функцыю і незалежную пераменную. Напрыклад, згодна з другім законам Ньютана пры руху па прамой матэрыяльнага пункта пастаяннай масы $m$ справядлівая формула $F=ma$, дзе $F$ — сіла, якая выклі-

кае рух, $a$ — паскарэнне пункта. Няхай сіла $F$ залежыць толькі ад часу $t$, г. зн. $F=F(t)$. Успамінаючы, што паскарэнне ёсць другая вытворная каардынаты па часу $(a(t)=x''(t))$, атрымліваем дыферэнцыяльнае ўраўненне адносна функцыі $x(t)$:

$$F(t)=mx''(t), \text{ г. зн. } x''(t)=\frac{F(t)}{m},$$

для рашэння якога спачатку знаходзім $x'(t)$ як першавобразную функцыі $\frac{F(t)}{m}$, а затым і $x(t)$ як першавобразную функцыі $v(t)=x'(t)$. Агульнае рашэнне залежыць ад дзвюх адвольных пастаянных. Для таго каб іх знайсці, звычайна задаюць каардынату і скорасць у які-небудзь момант часу $t$.

Прыклад 1. Пры вертыкальным руху пад дзеяннем сілы цяжару каардыната $h(t)$ пункта адзінкавай масы задавальняе дыферэнцыяльнаму ўраўненню (вось $Oz$ накіравана вертыкальна ўніз):

$$h''(t)=g.$$

Агульнае рашэнне гэтага ўраўнення мае выгляд:

$$h(t)=h_0+v_0t+\frac{gt^2}{2}, \text{ дзе } h_0=h(0), \ v_0=v(0).$$

Задаўшы $h_0$ і $v_0$, мы атрымаем ужо адзінае рашэнне. ●

Наогул першавобразную $F$ для функцыі $f$ можна разглядаць як рашэнне *найпрацейшага дыферэнцыяльнага ўраўнення:*

$$F'(x)=f(x), \tag{1}$$

дзе $f(x)$ — дадзеная функцыя, $F(x)$ — рашэнне гэтага ўраўнення.

**2. Дыферэнцыяльнае ўраўненне паказальнага росту і паказальнага ўбывання.** Рашэнне многіх задач фізікі, тэхнікі, біялогіі і сацыяльных навук зводзіцца да задачы знаходжання функцый, якія задавальняюць дыферэнцыяльнаму ўраўненню

$$f'(x)=kf(x), \tag{2}$$

дзе $k$ — некаторая канстанта.

Ведаючы формулу вытворнай паказальнай функцыі, лёгка здагадацца, што рашэннем ураўнення (2) з'яўляецца любая функцыя віду

$$f(x)=Ce^{kx}, \tag{3}$$

дзе $C$ — пастаянная. Паколькі $C$ адвольнае, у дыферэнцыяльнага ўраўнення (2) бесканечна многа рашэнняў.

Дакажам, што іншых рашэнняў, акрамя функцый віду (3), ураўненне (2) не мае. Для гэтага разгледзім адвольную функцыю $f$, якая задавальняе ўраўненню (2), і дапаможную функцыю

$$g(x)=f(x)e^{-kx}. \tag{4}$$

Знойдзем яе вытворную:



$$g'(x)=f'(x)e^{-kx}+f(x)(e^{-kx})'=f'(x)e^{-kx}-kf(x)e^{-kx}.$$

Падстаўляючы $kf(x)$ замест $f'(x)$ з ураўнення (2), атрымаем:

$$g'(x)=kf(x)e^{-kx}-kf(x)e^{-kx}=0.$$

З роўнасці вытворнай функцыі $g$ нулю вынікае, што $g(x)=C$ пры ўсіх $x$. З (4) атрымліваем:

$$f(x)e^{-kx}=C, \text{ адкуль } f(x)=Ce^{kx},$$

што і трэба было даказаць.

Заўвага. У прыведзеных вышэй разважаннях мы дапускалі, што функцыя $f$ вызначана і задавальняе ўраўненню (2) на ўсёй лікавай прамой. У канкрэтных задачах часта прыходзіцца разглядаць функцыі, якія задавальняюць ураўненню (2) толькі на некаторым прамежку. Натуральна, што ў такім выпадку формула (3) будзе даваць агульнае рашэнне задачы толькі на прамежку, на якім выконваецца ўраўненне (2).

Сэнс дыферэнцыяльнага ўраўнення (2) заключаецца ў тым, што скорасць змянення функцыі ў пункце $x$ прапарцыянальная значэнню самой функцыі ў гэтым пункце. Гэта ўраўненне часта сустракаецца пры рашэнні практычных задач.

○ Прыклад 1. (Радыеактыўны распад.) Няхай у пачатковы момант часу маса радыеактыўнага рэчыва роўна

$$m(0)=m_0. \tag{5}$$

Эксперыментальна ўстаноўлена, што скорасць памяншэння масы рэчыва $m(t)$ з часам $t$ прапарцыянальная яго колькасці, г. зн. $m'(t)=-km(t)$, дзе $k>0$. Як паказана вышэй, $m(t)=Ce^{-kt}$. Канстанта $C$ знаходзіцца з умовы (5). А іменна пры $t=0$

$$m_0=m(0)=Ce^{-k\cdot 0}, \text{ г. зн. } C=m_0.$$

Канчаткова атрымліваем:

$$m(t)=m_0e^{-kt}. \ ● \tag{6}$$

Разгледжаны прыклад тыповы: каб вылучыць з бесканечнага ліку рашэнняў дыферэнцыяльнага ўраўнення адзін, звычайна трэба яшчэ ўвесці пачатковыя ўмовы (у нашым выпадку гэта ўмова (5)).

Прамежак часу $T$, праз які маса радыеактыўнага рэчыва памяншаецца ў 2 разы, называюць *перыядам паўраспаду* гэтага рэчыва. Ведаючы $T$, можна знайсці $k$. Паколькі

$$m(T)=\frac{1}{2}m_0, \text{ г. зн. } m_0e^{-kT}=\frac{1}{2}m_0,$$

маем $e^{-kT}=\frac{1}{2}$.

Значыць, $e^{kT}=2$, $kT=\ln 2$, адкуль $k=\frac{\ln 2}{T}$.

Напрыклад, для радыю $T\approx 1550$ гадоў. Таму (калі час вы-

мяраецца ў гадах) $k=\frac{\ln 2}{1550}\approx 0{,}000447$. Праз мільён гадоў ад пачатковай масы радыю $m_0$ застанецца толькі $m(10^6)\approx m_0e^{-447}\approx$ $\approx 0{,}6\cdot 10^{-194}m_0$.

**3. Гарманічныя ваганні.** Вытворную ад вытворнай $f'$ функцыі $f$ называюць *другой вытворнай* функцыі $f$ і абазначаюць $f''$ (чытаецца: «эф два штрыхі»). Напрыклад:

$$\begin{aligned}\sin' x=\cos x,\ \sin''(x)=\cos' x=-\sin x,\\ \cos' x=-\sin x,\ \cos'' x=-\sin' x=-\cos x.\end{aligned} \qquad (7)$$

Другая вытворная дапамагае больш падрабязна даследаваць паводзіны функцыі. Першая вытворная ёсць скорасць змянення функцыі, а другая вытворная ёсць скорасць змянення гэтай скорасці.

Аналізуючы формулы (7), можна заўважыць, што другія вытворныя сінуса і косінуса адрозніваюцца ад саміх функцый толькі знакам. Інакш кажучы, абедзве гэтыя функцыі задавальняюць пры ўсіх значэннях аргумента $t$ ураўненню

$$f''(t)=-f(t).$$

У фізіцы, у прыватнасці ў механіцы, вялікую ролю адыгрываюць функцыі $f$, якія задавальняюць ураўненню

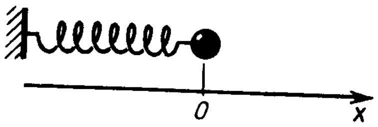
$$f''(t)=-\omega^2 f(t), \qquad (8)$$

дзе $\omega$ — дадатная пастаянная.

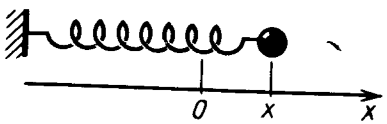
Разбяром задачу з механікі, якая прыводзіць да ўраўнення такога віду. Няхай да шарыка масай $m$ прымацавана размешчаная гарызантальна спружына, другі канец якой замацаваны (рыс. 148) і няхай у стане раўнавагі каардыната $x$ цэнтра шарыка роўна нулю. Пры перамяшчэнні цэнтра ў пункт з каардынатай $x\neq 0$ узнікае сіла, якая імкнецца вярнуць шарык у стан раўнавагі. Згодна з законам Гука гэта сіла прапарцыянальная перамяшчэнню $x$, г. зн. $F=-kx$, дзе $k$ — дадатная канстанта (гл. рыс. 149). Па другому закону Ньютана $F=ma$, таму, улічваючы, што пры руху па прамой паскарэнне ёсць другая вытворная ад каардынаты, маем:

$$ma(t)=mx''(t)=F,\ \text{г. зн.}\ x''(t)=-\frac{k}{m}x(t).$$

Інакш кажучы, рух цэнтра шарыка пад дзеяннем сіл пругкасці падпарадкаваны ўраўненню (8) пры $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.




Рыс. 148




Рыс. 149



Пакажам, што фізічная велічыня, якая змяняецца ў часе ў адпаведнасці з ураўненнем (8), робіць гарманічнае ваганне (гл. п. 7). Само ўраўненне (8) называюць *дыферэнцыяльным ураўненнем гарманічных ваганняў*.

Праверым, што пры любых пастаянных $A$ і $\varphi$ функцыя

$$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (9)$$

ёсць рашэнне ўраўнення (8). На самай справе, карыстаючыся формулай для вытворнай складанай функцыі, атрымліваем:

$$\begin{aligned}f'(t)&=-A\omega\sin(\omega t+\varphi),\\ f''(t)&=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 f(t).\end{aligned}$$

Правільна і адваротнае: любое рашэнне ўраўнення (8) ёсць функцыя выгляду (9), прычым звычайна выбіраюць $A\geqslant 0$, $\varphi\in[0;\ 2\pi]$. Доказ гэтага выходзіць за рамкі школьнага курса.

Адвольныя пастаянныя $A$ і $\varphi$ можна вызначыць, калі зададзены пачатковыя ўмовы $f(0)=y_0$, $f'(0)=v_0$.

**4. Падзенне цел у атмасферным асяроддзі.** Разгледзім больш складаны прыклад. Пры падзенні цел у атмасферы трэба ўлічваць супраціўленне паветра. Эксперыментальна ўстаноўлена, што сіла супраціўлення паветра прапарцыянальна скорасці руху, г. зн. сіла $F$, якая дзейнічае на цела, роўна $F(t)=mg-kh'(t)$, дзе $m$ — маса цела, $g$ — паскарэнне свабоднага падзення, $h(t)$ — каардыната на прамой (вось $Oh$ накіравана вертыкальна ўніз), $k$ — каэфіцыент прапарцыянальнасці. Па другому закону Ньютана $F=ma$, таму атрымліваем ураўненне

$$mz''(t)=mg-kz'(t),\ \text{г. зн.}\ z''(t)=g-\frac{k}{m}z'(t),$$

якое зручна разглядаць як дыферэнцыяльнае ўраўненне

$$v'(t)=g-bv(t),\ \text{дзе}\ b=\frac{k}{m}>0, \qquad (10)$$

адносна скорасці руху $v(t)=z'(t)$. Для таго каб прывесці гэта ўраўненне да знаёмага выгляду, увядзём новую невядомую функцыю $y(t)=\frac{g}{b}-v(t)$, тады $y'(t)=\left(\frac{g}{b}-v(t)\right)'=-v'(t)$ і ўраўненне (10) запісваецца ў выглядзе

$$-y'(t)=by(t),\ \text{г. зн.}\ y'(t)=-by(t),$$

рашэнні якога ўжо вядомыя: $y(t)=Ce^{-bt}$. Значыць, $v(t)=$ $=\frac{g}{b}-y(t)=\frac{g}{b}-Ce^{-bt}$.

Функцыя $y=e^{-bt}$ убывае на $\mathbf{R}$, пры гэтым яе значэнні неабмежавана памяншаюцца пры ўзрастанні $t$ (г. зн. $Ce^{-bt}\to 0$ пры $t\to\infty$ для любога $C$). Гэта азначае, што скорасць прыбліжаецца да пастаяннага значэння $\frac{g}{b}$, якое залежыць ад велічыні каэфіцыента прапарцыянальнасці $k$ і масы $m$. Напрыклад, пры зацяж-

ных скачках (парашут не раскрыты!) гэта скорасць роўна прыкладна 50 м/с, а скорасць парашутыста пры прызямленні (калі $k$ значна большы) каля 4—5 м/г. ▲

Разгледжаныя прыклады дазваляюць зразумець, наколькі магутным апаратам даследавання з'яўляюцца дыферэнцыяльныя ўраўненні. Вельмі часта элементарныя законы, што кіруюць якім-небудзь працэсам, запісваюцца ў выглядзе дыферэнцыяльных ураўненняў. Для таго каб выявіць, як працэс разгортваецца ў часе, прыходзіцца гэтыя дыферэнцыяльныя ўраўненні рашаць.

### *Практыкаванні*

**568.** Праверце, што функцыя $y(t)$ з'яўляецца рашэннем дадзенага дыферэнцыяльнага ўраўнення:

а) $y(t)=3\cos(2t+\pi)$, $y''=-4y$;

б) $y(t)=4\sin\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)$, $y''=-\frac{1}{4}y$;

в) $y(t)=2\cos 4t$, $y''+16y=0$;

г) $y(t)=\frac{1}{3}\sin(0{,}1t+1)$, $y''+0{,}01y=0$.

**569.** Дакажыце, што функцыя $y=5e^{3x}$ задавальняе ўраўненню $y'=3y$.

**570.** Дакажыце, што функцыя $y=7e^{-2x}$ задавальняе ўраўненню $y'=-2y$.

**571.** Дакажыце, што функцыя $y=3e^{-7x}$ задавальняе ўраўненню $y'=-7y$.

**572.** Знайдзіце якое-небудзь адрознае ад нуля рашэнне дыферэнцыяльнага ўраўнення:

а) $y''=-25y$; б) $\frac{1}{9}y''+4y=0$;

в) $4y''+16y=0$; г) $y''=-\frac{1}{4}y$.

**573.** Напішыце дыферэнцыяльнае ўраўненне гарманічнага вагання:

а) $x=2\cos(2t-1)$; б) $x=6{,}4\cos\left(0{,}1t+\frac{\pi}{7}\right)$;

в) $x=4\sin\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $x=0{,}71\sin(0{,}3t-0{,}7)$.

---

**574.** Дакажыце, што сума двух гарманічных ваганняў $x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ і $x_2(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$ будзе перыядычнай функцыяй тады і толькі тады, калі адносіна частот ёсць рацыянальны лік $r$, г. зн. $\frac{\omega_1}{\omega_2}=r$.

**575.** Ад $m$ міліграмаў радыю $C$ праз $t$ мінут радыеактыўнага распаду засталося $n$ міліграмаў. Знайдзіце перыяд паўраспаду радыю $C$.



**576.** Да пачатку радыеактыўнага распаду было 1 г радыю $A$. Праз колькі мінут яго застанецца 0,125 г, калі яго перыяд паўраспаду роўны 3 мін?

**577.** Перыяд паўраспаду радыеактыўнага рэчыва роўны 1 г. Праз колькі гадзін яго колькасць паменшыцца ў 10 разоў? Вылічыце, якая доля радыю застанецца праз 1000 гадоў, калі перыяд яго паўраспаду роўны 1550 гадам.

**578.** Адно цела мае тэмпературу 200°, а другое 100°. Праз 10 мін астывання гэтых цел на паветры з тэмпературай 0° першае цела астыла да тэмпературы 100°, а другое — да 80°. Праз колькі мінут тэмпературы цел зраўнуюцца? (Тэмпература цела $T(t)$ задавальняе ўраўненню $T'(t)=-k(T-T_1)$, дзе $T_1$ — тэмпература навакольнага асяроддзя.)

**579.** Два целы маюць аднолькавую тэмпературу 100°. Яны вынесены на паветра (яго тэмпература 0°). Праз 10 мін тэмпература аднаго цела стала 80°, а другога 64°. Праз колькі мінут пасля пачатку астывання рознасць іх тэмператур будзе роўна 25°?

**580.** Маторная лодка рухаецца па возеры са скорасцю 30 км/г. Якая скорасць лодкі праз 3 мін пасля выключэння матора? (Выкарыстайце тое, што скорасць лодкі $v(t)$ задавальняе дыферэнцыяльнаму ўраўненню $v'(t)=-kv(t)$, дзе $k=\frac{5}{3}$, $v$ — скорасць у метрах у мінуту.)

## Звесткі з гісторыі

**1. Аб паходжанні тэрмінаў і абазначэнняў.** Да множання роўных самножнікаў прыводзіць рашэнне многіх задач. Паняцце аб ступені з натуральным паказчыкам узнікла ўжо ў Старажытнай Грэцыі (выраз *квадрат ліку* ўзнік пры вылічэнні плошчы квадрата, а куб ліку — пры знаходжанні аб'ёму куба). Але сучасныя абазначэнні (тыпу $a^4$, $a^5$) у XVII ст. увёў Дэкарт.

Дробавыя паказчыкі ступені і найбольш простыя правілы дзеянняў над ступенямі з дробавымі паказчыкамі сустракаюцца ў XIV ст. у французскага матэматыка Н. Арэма (1323—1382). Вядома, што Шуке (каля 1445 — каля 1500) разглядаў ступені з адмоўнымі і нулявым паказчыкамі. С. Стэвін прапанаваў мець на ўвазе пад $a^{\frac{1}{n}}$ корань $\sqrt[n]{a}$. Але сістэматычна рацыянальныя паказчыкі першым пачаў ужываць Ньютан.

Нямецкі матэматык М. Штыфель (1487—1567) даў азначэнне $a^0=1$ пры $a\neq 1$ і ўвёў назву *паказчык* (гэта літарны пераклад з нямецкага Exponent). Нямецкае potenzieren абазначае *ўзвядзенне ў ступень*. (Адсюль паходзіць і слова *патэнцыраваць*, якое часта ўжываецца пры пераходах тыпу $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow$ $\Rightarrow a^{\log_a f(x)}=a^{\log_a g(x)}$.) У сваю чаргу тэрмін exponenten узнік пры не зусім дакладным перакладзе з грэчаскага слова, якім Дыяфант абазначаў квадрат невядомай велічыні.

Тэрміны *радыкал* і *корань*, уведзеныя ў XII ст., паходзяць ад лацінскага radix, якое мае два значэнні: *старана* і *корань*. Грэчаскія матэматыкі замест «здабыць корань» гаварылі «знайсці старану квадрата па яго дадзенай велічыні (плошчы)». Знак кораня ў выглядзе сімвалу $\sqrt{}$ з'явіўся ўпершыню ў 1525 г. Сучасны сімвал уведзены Дэкартам, які дадаў гарызантальную рыску. Ньютан ужо запісваў паказчыкі каранёў: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$.

Слова *лагарыфм* паходзіць ад грэчаскага λογοφ (лік) і αρίνμοφ (адносіна) і перакладаецца, значыць, як *адносіна лікаў*. Выбар вынаходнікам (1594 г.) лагарыфмаў Дж. Неперам такой назвы тлумачыцца тым, што лагарыфмы ўзніклі пры супастаўленні двух лікаў, адзін з якіх з'яўляецца членам арыфметычнай прагрэсіі, а другі — геаметрычнай (гл. ніжэй). Лагарыфмы з асновай $e$ увёў Спейдзел (1619 г.), які склаў першыя табліцы для функцыі $\ln x$. Назва больш пазнейшага паходжання *натуральны* тлумачыцца «натуральнасцю» гэтага лагарыфма. Н. Мяркатар (1620—1687), які прапанаваў гэту назву, выявіў, што $\ln x$ — гэта плошча пад гіпербалай $y=\frac{1}{x}$. Ён прапанаваў таксама назву *гіпербалічны*.

**2. З гісторыі лагарыфмаў.** На працягу XVI ст. рэзка ўзрос аб'ём работы, звязаны з правядзеннем прыбліжаных вылічэнняў у ходзе рашэння розных задач, і ў першую чаргу задач астраноміі, якая мае непасрэднае практычнае прымяненне (у прыватнасці, пры вызначэнні становішча судоў па зорках і па Сонцу). Найбольшыя праблемы ўзнікалі, як няцяжка зразумець, пры выкананні аперацый множання і дзялення. Спробы частковага спрашчэння гэтых аперацый шляхам звядзення іх да складання (была складзена, напрыклад, табліца квадратаў цэлых лікаў ад 1 да 100 000, якая дазваляла вылічваць здабыткі па формуле $ab=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2$) вялікага поспеху не прыносілі. Таму адкрыццё лагарыфмаў, якое зводзіць множанне і дзяленне лікаў да складання і адымання іх лагарыфмаў, падвоўжыла, па выразу Лапласа, жыццё вылічальнікаў.

Лагарыфмы незвычайна хутка ўвайшлі ў практыку. Вынаходнікі лагарыфмаў не абмежаваліся распрацоўкай новай тэорыі. Быў створаны практычны сродак — табліцы лагарыфмаў,— які рэзка павысіў вытворчасць працы вылічальнікаў. Дададзім, што ўжо ў 1623 г., г. зн. усяго праз 9 гадоў пасля выдання першых табліц, англійскім матэматыкам Д. Гантэрам была вынайдзена першая лагарыфмічная лінейка, якая стала рабочым інструментам для многіх пакаленняў. (Аж да самага апошняга часу, калі на нашых вачах вялікае распаўсюджанне атрымлівае электронная вылічальная тэхніка і роля лагарыфмаў як сродку вылічэння рэзка зніжаецца.)

Першыя табліцы лагарыфмаў складзены незалежна адзін ад аднаго шатландскім матэматыкам Дж. Неперам (1550—1617)





Непер Джон

(1550—1617) —

англійскі матэматык. Вынаходнік лагарыфмаў, складальнік першай табліцы лагарыфмаў, які аблягчыў работу вылічальнікаў многіх пакаленняў і аказаў вялікі ўплыў на развіццё дадаткаў матэматыкі.

і швейцарцам У. Бюргі (1552—1632). У табліцы Непера, якія былі выдадзены ў кнігах пад назвамі «Апісанне дзіўнай табліцы лагарыфмаў» (1614 г.) і «Будова дзіўнай табліцы лагарыфмаў» (1619 г.), увайшлі значэнні лагарыфмаў сінусаў, косінусаў і тангенсаў для вуглоў ад 0 да 90° з шагам у 1 мінуту. Бюргі падрыхтаваў свае табліцы лагарыфмаў лікаў, відаць, да 1610 г., але выйшлі ў свет яны ў 1620 г., ужо пасля выдання табліц Непера, і таму засталіся незаўважанымі.

Адна з важных ідэй, якія ляжаць у аснове вынаходніцтва лагарыфмаў, была ўжо вядома. Штыфель (1487—1567) і рад іншых матэматыкаў звярнулі ўвагу на тое, што множанню і дзяленню членаў геаметрычнай прагрэсіі

$$\ldots,\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots$$

адпавядаюць складанне і адыманне паказчыкаў, якія ўтвараюць арыфметычную прагрэсію

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Але адной гэтай ідэі не дастаткова. Напрыклад, «сетка» цэлых ступеней ліку 2 вельмі рэдкая; многія лікі «застаюцца без лагарыфмаў», таму неабходна была яшчэ адна ідэя: узводзіць у ступень лікі, вельмі блізкія да адзінкі. Заўважыўшы, што ступені $\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^n$ і $\left(1+\frac{1}{10^n}\right)^{n+1}$ пры вялікіх значэннях $n$ блізкія, Непер і Бюргі прывялі аналагічнае рашэнне: Непер браў у якасці асновы лік $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$, а Бюргі — лік $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)$.

Далейшы ход іх разважанняў і апісанне схем вылічэнняў пераказаць даволі цяжка як таму, што ёсць шмат няпростых дэталей, так і таму, што наогул тэксты XVI ст. даволі цьмяныя. Заўважым толькі, што фактычна далей Непер пераходзіць да асновы

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, а Бюргі да асновы $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$. Гэта не змяніла сутнасці справы (як вядома, $\log_{a^{10^n}} x=\frac{1}{10^n}\log_a x$, і таму дадзеныя пераходы прыводзяць толькі да пераносу коскі ў лагарыфме), але дазволіла некалькі спрасціць вылічэнні і самі табліцы.

Такім чынам, па сутнасці абодва вынаходнікі лагарыфмаў прыйшлі да вываду аб мэтазгоднасці разгляду ступеней віду $\left(1+\frac{1}{M}\right)^M$, дзе $M$ вельмі вялікі лік. Разгляд лікаў такога віду прыводзіць да вядомага вам ліку $e$, які вызначаўся як $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (азначэнне граніцы паслядоўнасці дадзена ў «Звестках з гісторыі» да раздзела III). Засталося ўжо недалёка да ідэі прыняцця ў якасці асновы лагарыфмаў ліку $e$ (аснова табліцы лагарыфмаў Бюргі супадае з дакладнасцю да трэцяга знака з $e$, аснова табліцы лагарыфмаў Непера блізкая да $\frac{1}{e}$).

Першыя табліцы дзесятковых лагарыфмаў (1617 г.) былі складзены па парадзе Непера англійскім матэматыкам Г. Брыгсам (1561—1630). Многія з іх былі знойдзены з дапамогай выведзенай Брыгсам прыбліжанай формулы

$$\log_{10} a\approx\frac{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}{m\left(\sqrt[m]{10}-1\right)},$$

дастаткова дакладнай пры вялікіх значэннях $m$ і $n$. Брыгс браў значэнні $m$ і $n$ у выглядзе ступеней двойкі: гэта давала яму магчымасць звесці вылічэнне $\sqrt[n]{a}$ і $\sqrt[m]{10}$ да паслядоўнага знаходжання квадратных каранёў.

Другая ідэя Брыгса дазваляе знаходзіць значэнні дзесятковых лагарыфмаў некаторых лікаў самастойна, без дапамогі табліц. Цэлая частка лагарыфма цэлага ліку на адзінку меншая за колькасць лічбаў у самім ліку. Таму, напрыклад, для знаходжання $\lg 2$ з дакладнасцю да трох знакаў дастаткова знайсці лік лічбаў $2^{10^3}$. Гэта не вельмі цяжка.

Пры складанні табліц лагарыфмаў важную ролю сыграла знойдзеная Неперам і Бюргі суадносіна паміж прырашчэннямі $\Delta x$ і $\Delta y$ у адвольным пункце $x_0$ для функцыі $y=\log_a x$. Адкінуўшы дэталі іх сістэмы выкладання, асноўны рэзультат можна выразіць так: $\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx\frac{k}{x}$, дзе $k$ — некаторая пастаянная. Калі аснова лагарыфмаў — ступень $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, дзе $n$ — дастаткова вялікі лік, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx\frac{1}{x}$.

Імкнучы $\Delta x$ да нуля, прыходзім да дыферэнцыяльнага ўраўнення $y'=\frac{1}{x}$, рашэннем якога, як вы ведаеце, з'яўляецца функцыя $\ln x+C$. Існуе сістэма выкладання, пры якой $\ln x_0$ з самага пачатку вызначаецца як $\int\limits_1^{x_0}\frac{dx}{x}$, г. зн. $\ln x_0$ — плошча крывалінейнай трапецыі, абмежаванай гіпербалай, воссю абсцыс і прамымі $x=1$ і $x=x_0$. Вывад вядомых вам уласцівасцей лагарыфмаў, зыходзячы з гэтага азначэння, не вельмі простая, але даступная вам задача.



### *Пытанні і задачы на паўтарэнне*

**1.** 1) Дайце азначэнне кораня $n$-й ступені з ліку. Што такое арыфметычны корань $n$-й ступені?

2) Знайдзіце значэнне:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; д) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n$.

3) Рашыце ўраўненне:

а) $x^3=125$; б) $x^6=64$; в) $x^5=-\frac{1}{243}$; г) $x^4=-16$.

**2.** 1) Пералічыце асноўныя ўласцівасці арыфметычных каранёў.

2) Пераўтварыце выраз:

а) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[8]{4}$; б) $\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[3]{320}}$; в) $\left(\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^2$; г) $\sqrt{\frac{a^4b^2}{c^8}}$.

3) Які з лікаў большы:

а) $\sqrt[7]{128}$ або $\sqrt[5]{4}$; б) $2^{100}$ або $100^{20}$;

в) $\sqrt[8]{26}$ або $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[5]{5}$ або $\sqrt[3]{3}$ ?

**3.** 1) Дайце азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам і пералічыце асноўныя ўласцівасці такіх ступеней.

2) Знайдзіце значэнне:

а) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[5]{64}:2^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^6$; в) $16^{-\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$.

3) Які з лікаў большы:

а) $\sqrt[3]{16}$ або $2^{\frac{5}{4}}$; б) $3^{-\frac{2}{3}}$ або $9^{-\frac{3}{4}}$;

в) $0{,}3^{\frac{4}{7}}$ або $0{,}3^{-\frac{4}{7}}$; г) $5^{-\frac{2}{3}}$ або $5^{-0,6}$?

**4.** 1) Пералічыце асноўныя ўласцівасці паказальнай функцыі.
2) Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=4^x$; б) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; в) $y=6^x$; г) $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$.

3) Якi з лікаў большы:

а) $2^{0,4}$ або $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$; б) $1,2^{-\sqrt{3}}$ або $1,2^{\sqrt{5}}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ або $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $0,3^{-\pi}$ або $0,3^{-3}$?

**5.** 1) а) Знайдзіце карані ўраўнення $a^x=a^c (a>0,\ a\neq 1)$.
б) Рашыце няроўнасць $a^x>a^c$ (разгледзьце два выпадкі: $0<a<1$ і $a>1$).
2) Рашыце ўраўненне:

а) $27^x=9^{\frac{1}{5}}$; б) $9^{x+1}+3^{x+2}=18$;

в) $0,5^{x^2+x-2,5}=\sqrt{2}$; г) $3^{x+2}-3^x=72$.

3) Рашыце няроўнасць:

а) $5^{x^2-1}>\frac{1}{5}$; б) $0,2^{x^2-2}>5$; в) $3^x<\frac{1}{9}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}>4$.

**6.** 1) Дайце азначэнне лагарыфма ліку.
2) Знайдзіце:

а) $\log_2 16\sqrt{2}$; б) $\log_{0,2} 25$; в) $\lg 0,01$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$.

3) Запішыце асноўную лагарыфмічную тоеснасць. З яе дапамогай вылічыце:

а) $3^{2+\log_3 5}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\log_2 3}$; в) $5^{-1+\log_5 2}$; г) $0,2^{1+\log_{0,2} 5}$.

**7.** 1) Пералічыце асноўныя ўласцівасці лагарыфмаў.
2) Пралагарыфмуйце па аснове $a$ выраз $(c>0,\ b>0)$:

а) $16b^7\sqrt[5]{c}$ пры $a=2$; б) $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^n}}$ пры $a=10$;

в) $\frac{27\sqrt{b}}{c^4}$ пры $a=3$; г) $\frac{0,49b^3}{c^5\sqrt{c}}$ пры $a=0,7$.

3) Знайдзіце $x$, калі:

а) $\log_3 x=2\log_3 7+\frac{2}{3}\log_3 27-\frac{3}{2}\log_3 16$;

б) $\log_2 x=2\log_2 5-\frac{1}{3}\log_2 8+\log_2 0,2$;



в) $\log_5 x=\log_5 1,5+\frac{1}{3}\log_5 8$;

г) $\lg x=1+2\lg 3-\frac{2}{3}\lg 125$.

**8.** 1) Дайце азначэнне лагарыфмічнай функцыі і пералічыце яе асноўныя ўласцівасці.
2) Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=\log_4 x$; б) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$;

в) $y=\log_5 x$; г) $y=\log_{\frac{1}{4}} x+1$.

3) Які з лікаў большы:

а) $\lg 7$ або $3\lg 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ або $\log_{\frac{1}{3}} 6$;

в) $\log_3 5$ або $\log_3 6$; г) $\log_2 3$ або $\log_3 2$?

**9.** 1) а) Запішыце ўсе карані ўраўнення $\log_a x=b (a>0, a\neq 1)$.
б) Рашыце няроўнасць $\log_a x>\log_a c$ (разгледзьце два выпадкі: $0<a<1$, $a>1$).
2) Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2(x-15)=4$; б) $\lg^2 x+2\lg x=8$;
в) $\ln^2(x-2)=4$; г) $\lg(x^2-2x-4)=\lg 11$.

3) Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{0,6} x>2$; б) $\lg x\leqslant -2$;
в) $\ln x\geqslant -3$; г) $\log_7 x<1$.

**10.** 1) Запішыце формулу вытворнай для функцыі $y=e^x$, $y=a^x$.
2) Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $v(x)=5-2e^{4-3x}$; б) $u(x)=3\cdot 5^{7x-1}$;

в) $g(x)=e^{-3x}$; г) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

3) Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для функцый:

а) $v(x)=e^{5x}-7e^{-4x}$; б) $u(x)=5e^{0,7x}$;
в) $g(x)=e^{-3x}$; г) $f(x)=e^{2x}$.

**11.** 1) Якую вытворную мае функцыя $y=\log_a x$? Знайдзіце агульны выгляд першавобразнай для функцыі $f(x)=\frac{1}{x}$.
2) Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $y=x\ln 3x$; б) $y=\log_2(7-2x)$; в) $y=2\log_3 x$; г) $y=\ln\frac{x}{5}$.

3) Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для функцыі:

а) $f(x)=\frac{1}{5x}$; б) $g(x)=\frac{1}{x-3}$; в) $u(x)=\frac{5}{x}$; г) $h(x)=\frac{2}{x+1}$.

**12.** 1) Якую вытворную мае ступенная функцыя $y=x^{\alpha}$?
2) Пабудуйце графік функцыі і знайдзіце яе вытворную:
а) $y=x^7$; б) $y=x^{-4}$; в) $y=x^{0,3}$; г) $y=x^{\sqrt{2}}$.
3) Знайдзіце прыбліжанае значэнне:
а) $\sqrt[5]{32,02}$; б) $\sqrt[7]{127,9}$; в) $\sqrt[3]{64,3}$; г) $\sqrt[4]{80,6}$.

**13.** 1) Якія ўраўненні называюць ірацыянальнымі?
2) Рашыце ўраўненне:
а) $\sqrt{x-3}=2x-7$; б) $\sqrt[3]{2x+3}=2$;
в) $x-\sqrt{x}=12$; г) $x+3=\sqrt{33+x^2}$.
3) Рашыце сістэму ўраўненняў:
а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=3,\\ x-y=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=6,\\ xy=16;\end{cases}$
в) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ x-y=8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y=7,\\ x^2y=12.\end{cases}$

**14.** 1) Што называюць рашэннем сістэмы двух ураўненняў з дзвюма пераменнымі?
2) Рашыце сістэму ўраўненняў:
а) $\begin{cases}x-3y=5,\\ 2^{6y-x}=\frac{1}{4};\end{cases}$ б) $\begin{cases}5^{2x-y}=0,2,\\ 5^{y-x}=125;\end{cases}$
в) $\begin{cases}2xy=9,\\ 4^{x-2y}=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3^{3x+y}=\sqrt{3},\\ 5x-4y=15.\end{cases}$
3) Рашыце сістэму ўраўненняў:
а) $\begin{cases}x-y=4,\\ \log_2 x-\log_2 y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^{x-2y}=1,\\ \lg x+\lg(y+5)=2;\end{cases}$
в) $\begin{cases}\log_3(5x-y)=2,\\ xy=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+y^2=26,\\ \log_5 x=1+\log_5 y.\end{cases}$



# ЗАДАЧЫ НА ПАЎТАРЭННЕ

## § 1. Сапраўдныя лікі

### 1. Рацыянальныя і ірацыянальныя лікі

**1.** Ці правільнае сцверджанне:
а) калі натуральны лік дзеліцца на 6, то ён дзеліцца на 3;
б) калі сума двух лікаў — цотны лік, то кожнае складаемае цотнае;
в) калі здабытак двух лікаў роўны нулю, то кожны сумножнік роўны нулю;
г) калі куб некаторага ліку дзеліцца на 8, то гэты лік цотны?

**2.** Дакажыце, што сума трох паслядоўных натуральных лікаў дзеліцца на 3, а іх здабытак — на 6.

**3.** Да ліку 523 дапішыце дзве лічбы справа так, каб атрыманы пяцізначны лік дзяліўся на: а) 3 і 5? б) 8 і 9.

**4.** Дакажыце, што лік $10^{56}-1$ дзеліцца на 3 і 11.

**5.** У двухзначным ліку лічба адзінак на 2 большая за лічбу дзесяткаў. Сам лік большы за 30 і меншы за 40. Знайдзіце гэты лік.

**6.** Дакажыце, што калі дроб $\frac{a}{b}$ нескарачальны, то нескарачальны і дроб $\frac{ab}{a+b}$.

**7.** Дакажыце, што:
а) $|a|=|-a|$; б) $x\leqslant|x|$; в) $|x|^2=x^2$.

Знайдзіце значэнні выразаў (8—9).

**8.** а) $\dfrac{2,75:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)}$; б) $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0,175:\frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}$;

в) $\left(1,4-3,5:1\frac{1}{4}\right):2,4+3,4:2\frac{1}{8}$; г) $\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot 10}}$.

**9.** а) $\dfrac{0,5^2-0,5}{0,4^2+0,1^2+2\cdot 0,4\cdot 0,1}$; б) $\dfrac{1,2^2-1,8^2}{1,2\cdot 0,2-1,2\cdot 0,8}$;

в) $\dfrac{0,6^2+0,1^2-2\cdot 0,6\cdot 0,1}{1,5-1,5^2}$; г) $\left(1\frac{3}{5}\right)^2-\left(4\frac{5}{8}-2,4\right):\frac{5}{8}$.

**10.** Знайдзіце правільныя лічбы ў запісе прыбліжанага значэння ліку:

а) $3{,}82 \pm 0{,}1$; б) $1{,}980 \cdot 10^4 \pm 0{,}001 \cdot 10^4$;
в) $7{,}891 \pm 0{,}1$; г) $2{,}8 \cdot 10^{-4} \pm 0{,}3 \cdot 10^{-4}$.

**11.** Карыстаючыся формулай $(1+x)^n \approx 1+nx$, вылічыце прыбліжана:

а) $1{,}002^5$; б) $0{,}997^4$; в) $2{,}004^3$; г) $3{,}01^5$.

**12.** Вядома, што $a \approx 11{,}5$, $b \approx 3{,}8$. Знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу: а) $a+b$; б) $3a-b$; в) $ab$; г) $\frac{a}{b}$.

**13.** Запішыце ў выглядзе звычайнага дробу:

а) $2,(3)$; б) $0,(66)$; в) $1{,}0(8)$; г) $1,(33)$.

**14.** Дакажыце, што не з'яўляецца рацыянальным кожны з лікаў:

а) $\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{7}$; в) $\sqrt{5}+1$; г) $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

**15.** Ці правільна, што сума (здабытак) лікаў $a$ і $b$ з'яўляецца рацыянальным (ірацыянальным) лікам, калі:

а) $a$ і $b$ — рацыянальныя лікі;
б) $a$ і $b$ — ірацыянальныя лікі;
в) $a$ — рацыянальны; а $b$ — ірацыянальны лік?

**16.** Знайдзіце з дакладнасцю да 0,01:

а) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}$; б) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}$; в) $\sqrt{3}+\frac{5}{6}$; г) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}$.

**17.** Размясціце лікі ў парадку ўзрастання. Запішыце, якія з іх з'яўляюцца рацыянальнымі, а якія — ірацыянальнымі лікамі:

а) $\sqrt{3}$; $-2$; $-1{,}7$; $\frac{\pi}{3}$; б) $\log_2 3$; $-1$; $\frac{5}{6}$; $-\sqrt{5}$;

в) $0,(2)$; $\frac{7}{6}$; $-\frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $e$; $-1,(6)$; $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

Параўнайце лікі (18—19).

**18.** а) $\frac{4}{\lg\frac{1}{2}}$ і $\frac{7}{\lg\frac{1}{2}}$; б) $(\sqrt{5}+2)$ і $\sqrt{17}$;

в) $\log_3 7$ і $\log_7 3$; г) $(\sqrt{7}+3)$ і $\sqrt{31}$.

**19.** а) $15^{\log_3 10}$ і $10^{\log_3 15}$; б) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ і $(\sqrt{30}-\sqrt{3})$;

в) $\sin 2{,}1$ і $\sin 7{,}98$; г) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})$ і $(\sqrt{3}+\sqrt{10})$.



**20.** Дакажыце рацыянальнасць ліку:

а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$;

б) $(\sqrt{2}+1)^2+(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)$;

в) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\sqrt{35}$; г) $(3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+4\sqrt{50}):\sqrt{2}$.

## 2. Працэнты. Прапорцыі

**21.** Знайдзіце лік $x$, калі: а) $x$ складае 2,5 % ад 320; б) 2,5 % ліку $x$ роўны 75; в) $x$ роўны ліку працэнтаў, які складае 2,8 ад 84; г) $x$ складае 140 % ад 35.

**22.** За 1987 г. выпуск прадпрыемствам прадукцыі ўзрос на 4 %, а за наступны год — на 8 %. Знайдзіце сярэдні штогадовы прырост прадукцыі за двухгадовы перыяд.

**23.** З дадзеных чатырох лікаў першыя тры прапарцыянальныя лікам 5, 3, 20, а чацвёрты лік складае 15 % ад трэцяга. Знайдзіце гэтыя лікі, калі другі лік на 375 меншы за суму астатніх.

**24.** За асенне-зімовы перыяд цана на агародніну ўзрасла на 25 %. На колькі працэнтаў трэба знізіць цану вясной, каб летам агародніна мела ранейшы кошт?

**25.** Знайдзіце невядомы член прапорцыі:

а) $12:\frac{1}{8}=x:\frac{5}{36}$; б) $x:(-0{,}3)=0{,}15:1{,}5$;

в) $\frac{0{,}13}{x}=\frac{26}{3\frac{1}{3}}$; г) $\frac{x}{2{,}5}=\frac{-6{,}2}{15}$.

**26.** Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{x-2}{2{,}5}=\frac{6}{x}$; б) $\frac{x}{x+5}=\frac{4{,}8}{1{,}2}$;

в) $\frac{x-3}{x-2}=\frac{6{,}5}{1{,}5}$; г) $\frac{4-x}{1{,}2}=\frac{5}{x+3}$.

**27.** Праз пункт $E$ стараны $AB$ трохвугольніка $ABC$ праведзена прамая, паралельная старане $AC$. Знайдзіце:
а) адрэзкі, на якія прамая дзеліць старану $BC$, калі $AB = 22{,}5$ см, $AE = 18$ см, $BC = 15$ см;
б) плошчы фігур, на якія дзеліцца трохвугольнік $ABC$, калі $AB = 7{,}5$ см, $AE = 5$ см, а плошча трохвугольніка $ABC$ роўна 72 см$^2$.

## 3. Прагрэсіі

**28.** Знайдзіце суму 20 членаў арыфметычнай прагрэсіі, калі першы яе член роўны 2, а сёмы роўны 20.

29. Паміж лікамі 4 і 40 знайдзіце такія чатыры лікі, каб разам з дадзенымі яны ўтварылі арыфметычную прагрэсію.

30. Дакажыце, што лікі $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ з'яўляюцца трыма паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі.

31. Сума першага і пятага членаў арыфметычнай прагрэсіі роўна 26, а здабытак другога і чацвёртага яе членаў роўны 160. Знайдзіце суму шасці першых членаў прагрэсіі.

32. Спрасціце выраз $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2$, калі вядома, што лікі $a$, $b$, $c$, $d$, узятыя ў дадзеным парадку, складаюць геаметрычную прагрэсію.

33. Дакажыце, што лікі $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ і $\frac{1}{2}$ утвараюць геаметрычную прагрэсію.

34. Чацвёрты член геаметрычнай прагрэсіі большы за другі на 24, а сума другога і трэцяга роўна 6. Знайдзіце першы член і назоўнік прагрэсіі.

35. Знайдзіце лік членаў канечнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой першы, другі і апошні члены адпаведна роўны 3, 12 і 3072.

36. Назоўнік канечнай геаметрычнай прагрэсіі роўны $\frac{1}{3}$, чацвёрты яе член роўны $\frac{1}{54}$, а сума ўсіх членаў $\frac{121}{162}$. Колькі членаў у гэтай прагрэсіі?

37. Знайдзіце чатыры лікі, з якіх першыя тры складаюць геаметрычную прагрэсію, а апошнія тры — арыфметычную, калі сума крайніх лікаў роўна 14, а сума сярэдніх 12.

38. Знайдзіце назоўнік і суму бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1=\sqrt{3}$, $b_2=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

39. Сума першых трох членаў бесканечна ўбываючай геаметрычнай прагрэсіі роўна 10,5, а сума прагрэсіі роўна 12. Знайдзіце яе першы член і назоўнік.

40. Тры лікі, кожны з якіх з'яўляецца ступенню з асновай $a$ ($a>0$, $a\neq 1$), складае геаметрычную прагрэсію. Дакажыце, што лагарыфмы гэтых лікаў складаюць арыфметычную прагрэсію.

## § 2. ТОЕСНЫЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ

### 4. Пераўтварэнні алгебраічных выразаў

41. Раскладзіце на множнікі:

а) $a^2+b^2+2a-2b-2ab$; б) $x^3+(y-1)x+y$;
в) $a^6-8$; г) $x^4-x^2(y^2+1)+y^2$.



42. Дакажыце, што:

а) $n^4+2n^3-n^2-2n$ дзеліцца на 24, калі $n\in \boldsymbol{N}$;
б) $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8)$ дзеліцца на 24, калі $n\in \boldsymbol{N}$;
в) $n^3-n$ дзеліцца на 6, калі $n\in \boldsymbol{N}$;
г) $n^3-4n$ дзеліцца на 48, калі $n\in \boldsymbol{N}$, $n$ — цотны.

43. Скараціце дроб:

а) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$; б) $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$;
в) $\frac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$; г) $\frac{x^3-27}{x^2y+3xy+9y}$.

Спрасціце выразы (44—45).

44. а) $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

б) $\frac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\frac{2b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}$;

в) $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x^2-2x}{4-x}+\frac{x+8}{x+2}$;

г) $\left(\frac{1}{c^2+3c+2}+\frac{2c}{c^2+4c+3}+\frac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\frac{(c-3)^2+12c}{2}$.

45. а) $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{4y^2}{4x^2-y^2}$;

б) $\left(\frac{3}{a-3}+\frac{4}{a^2-5a+6}+\frac{2a}{a-2}\right):\left(\frac{3}{2a+1}\right)^{-1}-\frac{a-12}{3(3-a)}$;

в) $\left(\frac{x^3-8}{x-2}+2x\right)\cdot(4-x^2)^{-1}-\frac{x-1}{2-x}$;

г) $\frac{k^2}{3+k}\cdot\frac{9-k^2}{k^2-3k}+\frac{27+k^3}{3-k}:\left(3+\frac{k^2}{3-k}\right)$.

### 5. Пераўтварэнне выразаў, якія змяшчаюць радыкалы і ступені з дробавымі паказчыкамі

46. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

47. Вылічыце:

а) $\sqrt{(\sqrt{5}-2{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1{,}5-\sqrt{5})^3}-1$; б) $\frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

в) $\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+0{,}75$;

г) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot(11+2\sqrt{30})$.

Спрасціце выразы (48—51).

**48.** а) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$;

б) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

в) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; г) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

**49.** а) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

б) $\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$;

г) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}}$.

**50.** а) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$;

б) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

в) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

г) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

**51.** а) $\frac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\left(\frac{2\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y\right):\frac{y-x}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$;

в) $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1$;



г) $\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$.

## 6. Пераўтварэнні трыганаметрычных выразаў

Спрасціце выразы (52—53).

**52.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

б) $\sqrt{\sin^2\beta(1+\operatorname{ctg}\beta)+\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}\beta)}$;

в) $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha-3\cos\alpha)^2$;

г) $\frac{\cos\beta\operatorname{tg}\beta}{\sin^2\beta}-\operatorname{ctg}\beta\cos\beta$.

**53.** а) $2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\beta)\cos(\pi-\beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{16\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{11\pi}{9}\cos 2\pi}$.

Дакажыце тоеснасць (54—55).

**54.** а) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}\beta$; б) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha}=-\operatorname{ctg}2\alpha$.

**55.** а) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\cos\frac{\alpha}{4}$ пры $\pi<\alpha<2\pi$;

б) $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ пры $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}}=-\cos\frac{\alpha}{2}$ пры $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

г) $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$ пры $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

**56.** Дакажыце справядлівасць роўнасці:

а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$;

б) $\operatorname{tg}20°-4\sin 20°\sin 50°=-2\sin 20°$;

в) $\frac{1}{\sin 10°}-4\sin 70°=2$;

г) $\cos 20°+2\sin^2 55°-\sqrt{2}\sin 65°=1$.

**57.** Дакажыце справядлівасць няроўнасці:

а) $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x\geqslant 2$, калі $0<x<\frac{\pi}{2}$;

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)}+2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 2\sqrt{3}$;

в) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)\times$
$\times(\sin\varphi+\cos\varphi-1)\leqslant 1$;

г) $2\sin 4\alpha\sin 2\alpha+\cos 6\alpha\geqslant -1$.

Вылічыце (58—59).

**58.** а) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, калі $\sin 2\alpha=\frac{2}{3}$;

б) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, калі $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$;

в) $\cos\alpha$, калі $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$;

г) $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, калі $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

**59.** а) $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\ldots+\lg\operatorname{tg}89°$;
б) $\lg\operatorname{tg}1°\cdot\lg\operatorname{tg}2°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89°$.

**60.** Параўнайце лік з нулём:

а) $\lg\sin 32°\cdot\lg\cos 7°\cdot\lg\operatorname{tg}40°\cdot\lg\operatorname{ctg}20°$;
б) $\lg\operatorname{tg}2°+\lg\operatorname{tg}4°+\lg\operatorname{ctg}2°+\lg\operatorname{ctg}4°$.

**61.** Знайдзіце суму $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}$, калі $\cos x=\frac{a}{b+c}$, $\cos y=\frac{b}{c+a}$, $\cos z=\frac{c}{a+b}$, $a+b+c\neq 0$.



## 7. Пераўтварэнні выразаў, якія змяшчаюць ступені і лагарыфмы

Параўнайце лікі (62, 63).

**62.** а) $3^{400}$ і $4^{300}$; б) $-\log_5\frac{1}{5}$ і $7^{\log_3 1}$;

в) $5^{200}$ і $2^{500}$; г) $\log_4\sqrt{2}$ і $\log_3\frac{1}{81}$.

**63.** а) $\log_3 2+\log_3 7$ і $\log_3(2+7)$;
б) $\log_4 5-\log_4 3$ і $\log_4(5-3)$;
в) $3\log_7 2$ і $\log_7(3-2)$;
г) $\log_3 1{,}5+\log_3 2$ і $\log_3 1{,}5^2$.

**64.** Спрасціце выраз:

а) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}$; б) $2^{4\log_4 a}-5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}a}-a^0$.

**65.** Запішыце лік у выглядзе дзесятковага дробу:

а) $49^{1-\log_7 2}+5$; б) $36^{\frac{1}{2}-\log_6 5}+2^{-\log_2 10}$.

**66.** Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3}$; б) $2\log_{0,3}3-2\log_{0,3}10$; в) $\frac{3\lg 2+3\lg 5}{\lg 13-\lg 130}$;

г) $(2\log_{12}2+\log_{12}3)(2\log_{12}6-\log_{12}3)$.

**67.** Пралагарыфмуйце па аснове $a$ выраз:

а) $25b^3\sqrt[4]{c^7}$ пры $a=5$; б) $\frac{0{,}0016b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}$ пры $a=0{,}2$, $b>0$, $c>0$.

**68.** Знайдзіце $x$, калі:

а) $\log_4 x=2\log_4 10+\frac{3}{4}\log_4 81-\frac{2}{3}\log_4 125$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}x=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}16-\log_{\frac{1}{3}}8+\log_{\frac{1}{3}}28$.

**69.** Вылічыце пры дапамозе табліц:

а) $\frac{7{,}832\cdot\sqrt[4]{12{,}98}}{5{,}256^2}$; б) $\frac{102{,}3^2}{\sqrt[3]{92{,}14\cdot 6{,}341}}$.

**70.** Спрасціце і знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\ldots\cdot\log_{10}9.$$

**71.** Вядома, што $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=A$.
Знайдзіце суму $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)$.

## § 3. ФУНКЦЫІ

### 8. Рацыянальныя функцыі

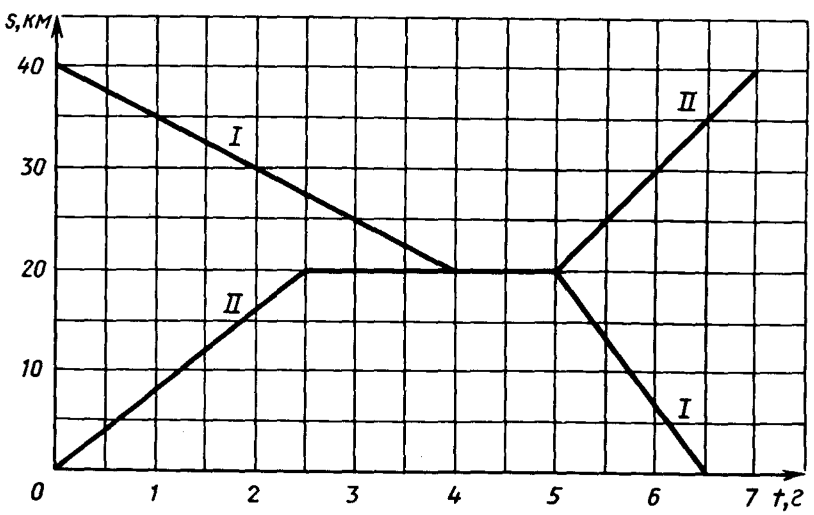
**72.** Адна аснова раўнабедранай трапецыі роўна бакавой старане, вугал пры аснове 30°. Задайце формулай:
а) плошчу трапецыі як функцыю бакавой стараны;
б) перыметр трапецыі як функцыю яе вышыні.

**73.** Бакавы кант правільнай трохвугольнай прызмы роўны старане асновы. Задайце формулай:
а) аб'ём прызмы як функцыю стараны асновы;
б) плошчу бакавой паверхні прызмы як функцыю аб'ёму.

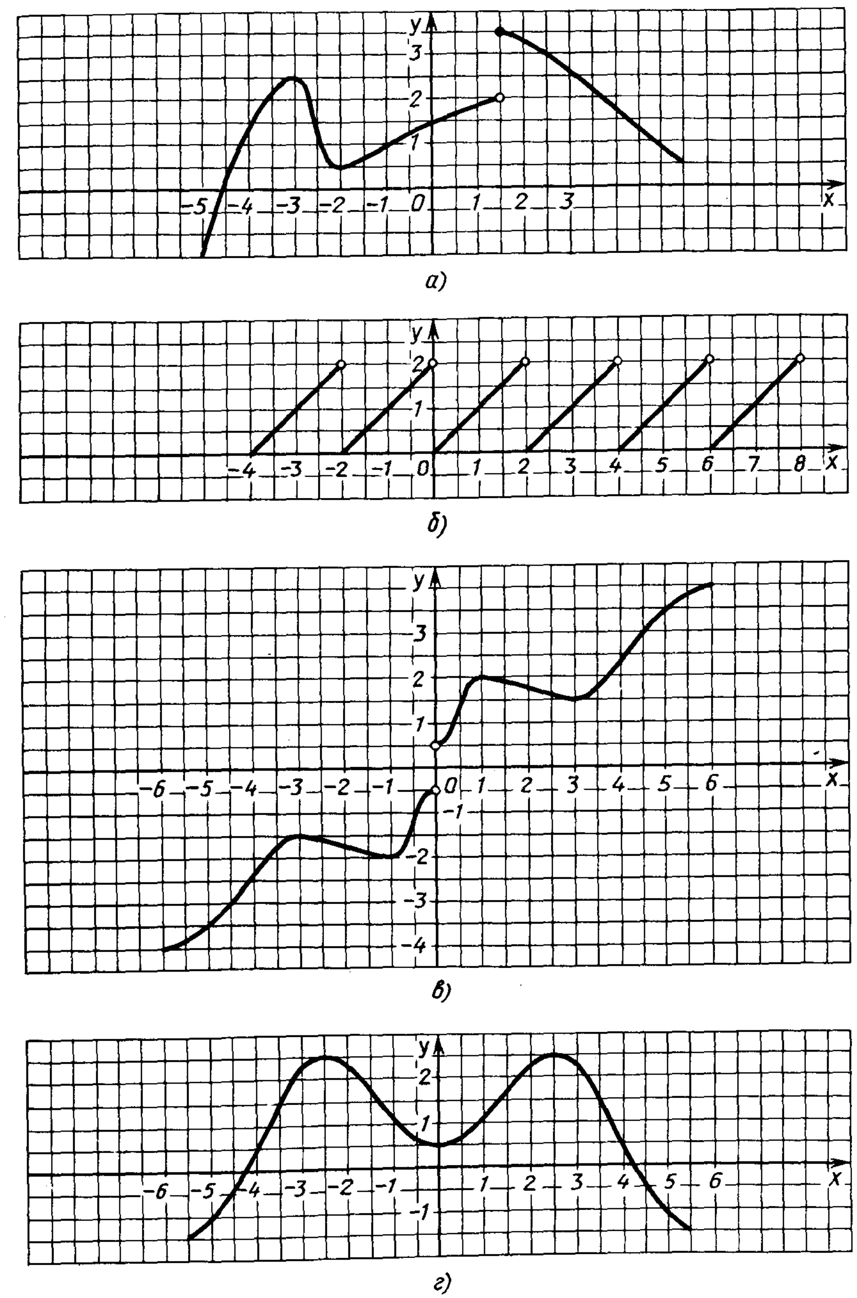
**74.** Матэрыяльны пункт, рухаючыся прамалінейна, робіць гарманічныя ваганні. Задайце формулай:
а) каардынату пункта як функцыю часу;
б) скорасць пункта як функцыю часу.

**75.** На рысунку 150 паказаны графікі руху двух турыстаў, якія выйшлі адначасова насустрач адзін аднаму з пунктаў $A$ і $B$.
а) Калі турысты прыбылі ў пункты $A$ і $B$?
б) Колькі часу быў у дарозе кожны з іх?
в) Калі кожны турыст прыбыў да месца прыпынку?
г) Колькі часу кожны з іх адпачываў?
д) З якой скорасцю рухаўся кожны турыст да прыпынку і пасля яго?
е) Якая сярэдняя скорасць руху кожнага турыста?

**76.** Па графіку функцыі (рыс. 151) адкажыце на пытанні:
1. Якія прамежкі ўзрастання функцыі?
2. Якія прамежкі ўбывання функцыі?




Рыс. 150




Рыс. 151

3. Назавіце пункты максімуму і мінімуму функцыі. Якія значэнні прымае функцыя ў гэтых пунктах?
4. Якія найбольшыя і найменшыя значэнні гэтых функцый на адрэзку $[-2;\ 2]$?
5. У якіх пунктах функцыя не з'яўляецца непарыўнай і якія значэнні функцыі ў гэтых пунктах?
6. На якіх прамежках функцыя непарыўная?
7. Якія з гэтых функцый цотныя і якія няцотныя?

**77.** Знайдзіце вобласць вызначэння функцыі:

а) $y=\frac{x-2}{x^2+2x-8}$; б) $y=\frac{x^2}{x^4-1}$;

в) $y=\frac{x^2-1}{x^4-9x^2+20}$; г) $y=\frac{x}{3x^2-5x+4}$.

**78.** Знайдзіце прамежкі непарыўнасці функцыі:

а) $y=\frac{x-4}{x^3-x}$; б) $y=x^2+\frac{4}{x-1}$;

в) $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$; г) $y=\frac{1}{3x^3-2x^2+5}$.

**79.** Дакажыце цотнасць (няцотнасць) функцыі:

а) $y=x^3-3x$; б) $y=\frac{5x^3}{1-x^2}$;

в) $y=x^4(x^2+2)$; г) $y=\frac{|x|+2}{x^2}$.

**80.** Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y=\frac{x-1}{3x}$; б) $y=\frac{x^2-4x-5}{9-x^2}$;

в) $y=1-\frac{2x-3}{5-x}$; г) $y=2x^2-5x+2$.

**81.** Знайдзіце прамежкі ўзрастання (убывання), пункты максімуму і пункты мінімуму функцыі:

а) $y=4x^2+3x-1$; б) $y=1-\frac{2}{x}$;

в) $y=(x-1)^4-2$; г) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік (82—83):

**82.** а) $y=3x-5$; б) $y=2x^2-7x+3$;
в) $y=2-\frac{1}{4}x$; г) $y=12-4x-x^2$.

**83.** а) $y=2-\frac{3}{x+1}$; б) $y=(x-2)^3-1$;

в) $y=\frac{x^4+1}{x^4}$; г) $y=4-(x+2)^4$.



Пабудуйце графік кожнай з функцый (84—86).

**84.** а) $y=3x-2$; б) $y=x^2-4x-5$; в) $y=\frac{1}{x}-1$; г) $y=x^3+2$.

**85.** а) $y=3x+|x|$; б) $y=|-x^2-x+2|$;
в) $y=2x-|x-3|$; г) $y=x^2-4|x|+3$.

**86.** а) $y=\frac{x+1}{|x|}$; б) $y=\frac{1}{x^2}+2$;

в) $y=\frac{|x|-2}{x}$; г) $y=\frac{2x^3-1}{x^3}$.

**87.** Ці маюць агульныя пункты графікі функцый:

а) $y=x^2$ і $y=x+6$; б) $y=\frac{3}{x}$ і $y=4(x+1)$;

в) $y=x^4$ і $y=2x^2+1$; г) $y=\frac{1}{x^2}$ і $y=x^2-2$?

**88.** Дакажыце, што ўраўненне мае корань, які належыць зададзенаму прамежку $I$:

а) $x^3-6x+2=0,\ I=[0;\ 1]$;
б) $x^4-3x^2+\frac{2}{9}=0,\ I=[1;\ 2]$;
в) $x^5+3x=5,\ I=[1;\ 2]$;
г) $4+2x^3-x^5=0,\ I=[-1;\ 2]$.

Рашыце графічна ўраўненні (няроўнасці) (89—90).

**89.** а) $4-3x\leqslant x+2$; б) $x^2-2x=-x$;
в) $\frac{1}{x}=4x$; г) $x^2+2x+2\geqslant x+1$.

**90.** а) $x^3=\frac{8}{x-1}$; б) $|1-x|=2-|x|$;

в) $x^3=\frac{1}{x}$; г) $|x-1|=3-|x|$.

**91.** Графік функцыі $y=ax+b$ праходзіць праз пункты $A(2;\ 1)$, $B(5;\ 10)$. Знайдзіце $a$ і $b$.

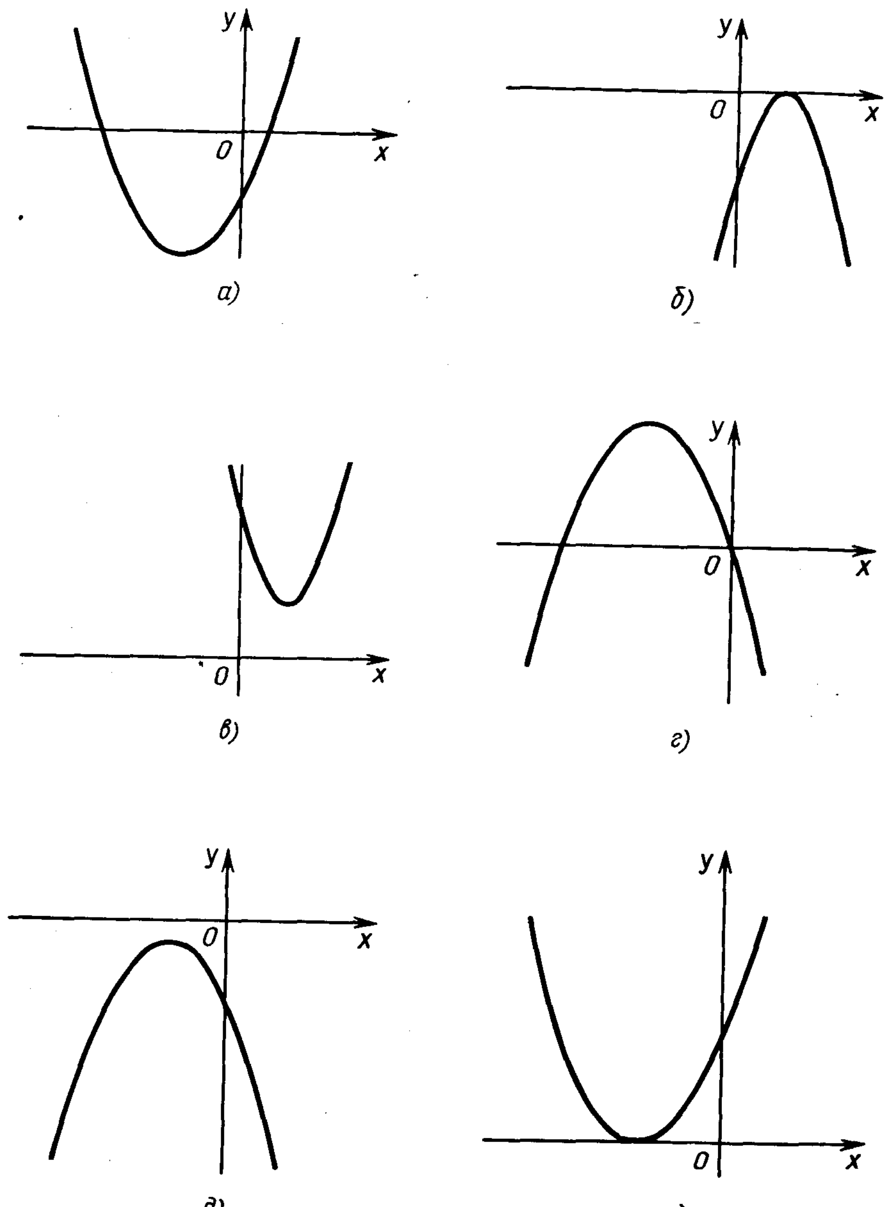
**92.** Па графіку квадратычнай функцыі (рыс. 152) вызначце знакі каэфіцыентаў $a$, $b$, $c$ і дыскрымінанта $D$.

**93.** Ці можа лінейная або квадратычная функцыя быць: а) цотнай; б) няцотнай; в) перыядычнай?

**94.** Запішыце функцыю ў выглядзе сумы цотнай і няцотнай функцый:

а) $y=\frac{x+1}{|x|}$; б) $y=x^3-x|x|+3$;

в) $y=\frac{x^3+x^2-x}{x^4-1}$; г) $y=2x^5+x^4-3x+8$.




Рыс. 152

**95.** Ці з'яўляецца цотнай або няцотнай функцыя:

а) $y=5x^6-2x^2-3$; б) $y=4x^5-2x^3+x$;

в) $y=\frac{3}{x^2}+1$; г) $y=-\frac{2}{x^3}$?



## 9. Трыганаметрычныя функцыі

Знайдзіце вобласць вызначэння кожнай з функцый (96—97).

**96.** а) $y=\frac{2}{\cos^2 x}$; б) $y=\frac{1}{1+2\sin 2x}$;

в) $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{2}}$; г) $y=\frac{x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.

**97.** а) $y=\sqrt{\sin x\cos x}$; б) $y=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$;

в) $y=\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}$; г) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

Знайдзіце вобласць значэнняў кожнай з функцый (98—99).

**98.** а) $y=1-3\sin\frac{x}{2}$; б) $y=2\cos x\operatorname{tg} x$;

в) $y=2+3\cos 5x$; г) $y=2|\sin x|-1$.

**99.** а) $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$; б) $y=\sqrt{1-\cos 4x}$;

в) $y=\frac{3}{\cos x-1}$; г) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

**100.** Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; б) $y=1-\operatorname{tg} 3x$;

в) $y=1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$; г) $y=1+2\cos 2x$.

**101.** Якія з дадзеных функцый з'яўляюцца цотнымі, якія — няцотнымі:

а) $y=\operatorname{tg} 3x-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; б) $y=\frac{\sin x\cos^2 x}{x}$;

в) $y=\sin\frac{x^3-x}{x^2-1}$; г) $y=\frac{\sin x}{x}-\cos x$?

**102.** Сярод дадзеных функцый знайдзіце перыядычныя і знайдзіце найменшыя дадатныя перыяды такіх функцый:

а) $y=1-\sin 5x$; б) $y=x\sin^2 x-x\cos^2 x$;

в) $y=3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $y=(\sin x+\cos x)^2$.

**103.** Знайдзіце прамежкі ўзрастання (убывання), пункты максімуму, пункты мінімуму функцыі:

а) $y=1+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\frac{2}{1-\cos x}$;

в) $y=0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$; г) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

**104.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі (калі яны існуюць):

а) $y=\cos 2x+\sin^2 x$; б) $y=1-4\sin 3x$;
в) $y=\sin x-\cos x$; г) $y=1+|\operatorname{tg} x|$.

Пабудуйце графікі функцыі (105—106).

**105.** а) $y=2\sin^2\frac{x}{2}$; б) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

в) $y=1+2\cos 2x$; г) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$.

**106.** а) $y=\frac{|x|\sin x}{x}$; б) $y=(\sin x-\cos x)^2$;

в) $y=\cos x+|\cos x|$; г) $y=\sin x\operatorname{ctg} x$.

**107.** Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $y=\frac{1}{2}+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $y=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; г) $y=1-\operatorname{tg} 2x$.

**108.** Вядома, што $x_0$ — корань ураўнення $\sin\frac{x}{10}=x^3$. Ці вынікае адсюль, што лік $(-x_0)$ з'яўляецца коранем гэтага ўраўнення?

**109.** Параўнайце лікі:

а) $\sin\left(\pi+\frac{1}{\pi}\right)$ і $\cos\left(\pi+\frac{1}{\pi}\right)$; б) $\operatorname{tg}\pi^2$ і $\operatorname{ctg}\pi^2$;
в) $\operatorname{tg} 2$ і $\operatorname{ctg} 2$; г) $\sin 1$ і $\cos 1$.

**110.** Дакажыце: а) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$, калі $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos(\sin\alpha)>0$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

**111.** Рашыце графічна ўраўненне:

а) $\sin x=-x$; б) $\operatorname{tg} x=\sqrt{2}\cos x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x=x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; г) $\cos x=1-x^2$.

### 10. Ступенная, паказальная і лагарыфмічная функцыі

Знайдзіце вобласць вызначэння кожнай з функцый (112—114).

**112.** а) $y=\sqrt{16x-x^3}$; б) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+8}}$;

в) $y=\sqrt[6]{5-x-\frac{4}{x}}$; г) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x-20}}$.

**113.** а) $y=\sqrt{x^2\cdot 3^x-3^{x+1}}$; б) $y=\sqrt[8]{2^{\sin x}-1}$;



в) $y=\log_3(4-3x+x^2)$; г) $y=\log_2\sin x$.

**114.** а) $y=\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+10)^2}$; б) $y=\sqrt{\log_5\cos x}$;

в) $y=\frac{\ln(3x-2)}{x^2-x-2}$; г) $y=\sqrt[4]{\lg(3x^2-2x)}$.

Знайдзіце вобласць значэнняў кожнай з функцый (115—116).

**115.** а) $y=2\sqrt{x+1}$; б) $y=5^{2-x}-1$;
в) $y=2\lg x+1$; г) $y=3x^{-2}$.

**116.** а) $y=2^{\cos x}$; б) $y=2-\sqrt[4]{x}$;

в) $y=1+|\log_2 x|$; г) $y=1+|\sqrt[3]{x}|$.

Знайдзіце прамежкі знакапастаянства кожнай з функцый (117—118).

**117.** а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-4$; б) $y=\log_4(x+3)$;

в) $y=2-3^x$; г) $y=\sqrt{x}-4$.

**118.** а) $y=4^{x+2}-4x$; б) $y=\lg(x-2)-1$;

в) $y=\sqrt{x}+3$; г) $y=2-\sqrt[3]{x}$.

Знайдзіце сярод дадзеных функцый цотныя і няцотныя (119—120).

**119.** а) $y=5^x+5^{-x}$; б) $y=\lg(1-x^2)$;

в) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; г) $y=x\sqrt[3]{x}$.

**120.** а) $y=x^{\frac{2}{3}}$; б) $y=3^x-3^{-x}$;

в) $y=2^{\cos x}$; г) $y=\sqrt[5]{x^4}+1$.

**121.** Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $y=2\sqrt{x}-1$; б) $y=4^{x-1}-2$;
в) $y=\frac{1}{2}\log_2(x+1)$; г) $y=\sqrt[3]{x-2}+1$.

Пабудуйце графікі функцый (122—123).

**122.** а) $y=\sqrt{x-2}+1$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$;

в) $y=2-\sqrt[3]{x+1}$; г) $y=1+\log_2(x+2)$.

**123.** а) $y=5^{\log_5(x-1)}$; б) $y=|\log_{\frac{1}{2}} x|-1$;

в) $y=2^{|x|}$; г) $y=\log_2 x^2$.

**124.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі (калі яны існуюць):

а) $y=\sqrt{36-x^2}$; б) $y=\begin{cases}\frac{1}{x+1} & \text{пры } 0\leqslant x\leqslant 7,\\ x^3+1 & \text{пры } -2\leqslant x<0;\end{cases}$

в) $y=3^{\sin x}$; г) $y=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{пры } -1\leqslant x<1,\\ \log_2 x & \text{пры } 1\leqslant x\leqslant 8.\end{cases}$

**125.** Рашыце графічна ўраўненне:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x=x-3$; б) $\sqrt{x-2}=\frac{3}{x}$;

в) $\log_2 x=2^{5-x}$; г) $2^{|x|}=11-|x|$.

**126.** Рашыце графічна няроўнасць:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x>x-3$; б) $\sqrt{x-2}\leqslant\frac{3}{x}$;

в) $2^{-|x|}\geqslant x^2+1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x>2x-7$.

**127.** Дакажыце, што найбольшыя значэнні функцый $y=(\log_2 3)^{\sin x}$ і $y=(\log_3 2)^{\cos x}$ роўныя.

**128.** Знайдзіце значэнне аргумента $x_0$, калі:

а) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}-\sqrt{1-x^2}$, $f(x_0)=0$;

б) $f(x)=\lg(x+15)+\lg x$, $f(x_0)=2$.

**129.** Дакажыце, што:

а) функцыя $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ убывае на мностве $\boldsymbol{R}$;

б) функцыя $f(x)=\log_2 3x$ узрастае на прамежку $(0;\ \infty)$.

## § 4. УРАЎНЕННІ, НЯРОЎНАСЦІ, СІСТЭМЫ ЎРАЎНЕННЯЎ І НЯРОЎНАСЦЕЙ

### 11. Рацыянальныя ўраўненні і няроўнасці

Рашыце ўраўненні (130—131).

**130.** а) $3(x-2)-5=4-(5x-1)$; б) $|2x-3|=5$;

в) $7-2(3-x)=4(x-1)+5$; г) $|4-3x|=2$.

**131.** а) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$; б) $\left|\frac{x-3}{2}+5\right|=4$;

в) $1-\frac{x-3}{2}=x-\frac{3(5-2x)}{7}$; г) $\left|1-\frac{x+2}{3}\right|=5$.

**132.** Пры якіх значэннях $a$ дадзенае ўраўненне:

а) $ax-2x=3(x-1)$; б) $a(1-x)+2=3x-ax$;

в) $x(2-a)-x=5+x$; г) $5+3(x+3a)=9a+5-$



мае адзінае рашэнне; не мае рашэнняў; мае бесканечнае мноства рашэнняў?

Рашыце няроўнасці (133—135).

**133.** а) $\frac{x-1}{2}+x<1{,}5x+3{,}5$; б) $\frac{5x-2}{3}-\frac{3-x}{2}>1$;

в) $x-4(3-x)\geqslant 2x+7$; г) $3+\frac{2-3x}{4}\leqslant 2x$.

**134.** а) $|4x-3|<5$; б) $|2x+5|\geqslant 1$;

в) $\frac{|x-7|}{3}\leqslant 2$; г) $4|2-x|\leqslant 12$.

**135.** а) $\frac{|2x-3|}{x}>0$; б) $\frac{x+2}{|x+4|}\leqslant 0$;

в) $(x-4)|5-3x|<0$; г) $|2x+7|(3-x)\leqslant 0$.

**136.** Рашыце ўраўненне:

а) $x^2+2x-15=0$; б) $7x^2+5x=0$;

в) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; г) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

**137.** Пры якім значэнні $a$ маюць агульны корань ураўненні:

а) $x^2-ax=0$ і $x^2-x-3a=0$;

б) $x^2-(a-1)x=3$ і $4x^2-(4a+3)x+9=0$;

в) $x^2+ax+8=0$ і $x^2+x+a=0$;

г) $2x^2+(3a-1)x=3$ і $6x^2-(2a-3)x=1$?

**138.** Знайдзіце значэнні $k$, пры якіх мае адзін корань ураўненне:

а) $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$;

б) $9x^2-2x+k=6-kx$;

в) $(2k-5)x^2-2(k-1)x+3=0$;

г) $3kx^2-6x+k-2=0$.

**139.** Не рашаючы ўраўнення $3x^2-5x-2=0$, знайдзіце: а) суму яго каранёў; б) здабытак яго каранёў; в) суму квадратаў яго каранёў; г) суму кубаў яго каранёў.

Рашыце ўраўненні (140—141).

**140.** а) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$; б) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$;

в) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$; г) $\frac{14}{x^2-4}+\frac{3}{(2-x)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

**141.** а) $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; б) $2x^4-5x^2+2=0$;

в) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$; г) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}5$.

Рашыце няроўнасці (142—144).

**142.** а) $2x^2+6x+17>0$; б) $x^2-3{,}2x<0$;

в) $(3x-2)^2-4x(2x-3)\geqslant 0$;
г) $(6x-1)(1+6x)+14<7x(2+5x)$.

**143.** а) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8}\leqslant 0$;
в) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$; г) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$.

**144.** а) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)\leqslant 0$; б) $x^4-3x^2+2\leqslant 0$;
в) $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$; г) $1+\frac{12}{x^2}<\frac{7}{x}$.

**145.** Дакажыце справядлівасць няроўнасці:

а) $m+\frac{4}{m}\geqslant 4$ пры $m>0$; б) $\frac{2m}{1+m^2}\leqslant 1$;

в) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$ пры $a>0$, $b>0$;

г) $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$ пры $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a<b$.

## 12. Ірацыянальныя ўраўненні і няроўнасці

Рашыце ўраўненні (146—149).

**146.** а) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$; б) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22$;
в) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; г) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11$.

**147.** а) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$; б) $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3$;
в) $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}=9$; г) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

**148.** а) $\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$; б) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0$;
в) $\frac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{7}$; г) $\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{3x+1}=0$.

**149.** а) $\sqrt{225+x^2}=x^2-47$; б) $\sqrt[3]{x-2}=x-2$;
в) $\sqrt{x^2+36}=x^2-54$; г) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+16x-5}=x-2$.

Рашыце няроўнасці (150—151).

**150.** а) $\sqrt{x^2-5}\geqslant 2$; б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)}>-1$;
в) $\sqrt{x^2-16}\geqslant 1$; г) $(\sqrt{x}-3)(x^2+1)>0$.

**151.** а) $\sqrt{x^2-6x+9}>3$; б) $\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x+1}\geqslant 0$;
в) $\sqrt{25-20x+4x^2}\leqslant 1$;
г) $\sqrt{2x-x^2+15}(3x-x^2-4)\leqslant 0$.



## 13. Трыганаметрычныя ўраўненні і няроўнасці

Рашыце ўраўненні (152—158).

**152.** а) $\cos x+2\cos 2x=1$; б) $4\sin 2x-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5$;
в) $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$; г) $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$.

**153.** а) $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\frac{\sin 2x}{2}$;
б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$;
в) $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
г) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$.

**154.** а) $\cos 4x+2\cos^2 x=1$; б) $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;
в) $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$; г) $4(1-\cos x)=3\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

**155.** а) $\cos 2x-\cos 6x=0$; б) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;
в) $\sin x+\sin 3x=0$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.

**156.** а) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x+2}=3-\operatorname{ctg} x$; б) $1+2\cos 3x\cos x-\cos 2x=0$;
в) $\frac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$; г) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$.

**157.** а) $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=0$; б) $\operatorname{tg} x-\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}$;
в) $\sin x\operatorname{tg} x=\cos x+\operatorname{tg} x$; г) $\sin x+\sin 2x=\operatorname{tg} x$.

**158.** а) $\arccos\frac{1+2x}{3}=\frac{2\pi}{3}$; б) $\operatorname{arctg}(2x-1)=-\frac{\pi}{4}$;
в) $\arcsin\frac{x+2}{4}=-\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{arctg}(2-3x)=\frac{3\pi}{4}$.

Рашыце няроўнасці (159—162).

**159.** а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\geqslant -1$;
в) $\sin 2x\sin\frac{x}{2}-\cos 2x\cos\frac{x}{2}>\frac{1}{2}$;
г) $\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**160.** а) $2\sin^2 x\leqslant 1$; б) $3\operatorname{tg}^2 2x\leqslant 1$; в) $4\cos^2 x\leqslant 3$;
г) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1\geqslant 0$.

**161.** а) $|\cos x-1|\leqslant 0{,}5$; б) $\sin x<\cos x$;
в) $\left|\sin 2x+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x>0$.

**162.** а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{3}$; б) $\log_{0,5}\sin x > 1$;
в) $\sin x + \cos x < 1$; г) $\log_{\sqrt{2}}\cos x > -1$.

## 14. Паказальныя ўраўненні і няроўнасці

Рашыце ўраўненні (163—167).

**163.** а) $(0,2)^{x^2-16x-37,5} = 5\sqrt{5}$; б) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3} = 0,01\cdot(10^{x-1})^3$;
в) $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}$; г) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$.

**164.** а) $5^{3x} - 2\cdot 5^{3x-1} - 3\cdot 5^{3x-2} = 60$;
б) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$;
в) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896$;
г) $5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 2^{2x+2}$.

**165.** а) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; б) $5^{3x+1} + 34\cdot 5^{2x} = 7\cdot 5^x$;
в) $16^x - 50\cdot 2^{2x} = 896$; г) $7^{4\sqrt{x}} - 8\cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7 = 0$.

**166.** а) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x = 5\cdot 6^x$; б) $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$;
в) $2\cdot 25^x - 5\cdot 10^x + 2\cdot 4^x = 0$; г) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$.

**167.** а) $3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} = 11$; б) $5^{\sin^2 x} - 25^{\cos x} = 0$;
в) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$; г) $3\cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Рашыце няроўнасці (168—170).

**168.** а) $\frac{16}{\sqrt{32}} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$; б) $3^{x^2+x} < 10^{\lg 9}$;
в) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x} < \frac{1}{9}$; г) $4^{x^2+x-11} > 5^{\log_5 4}$.

**169.** а) $0,04^x\cdot 26\cdot 0,2^x + 25 \leqslant 0$; б) $9^x - 84\cdot 3^{-2x} + \frac{1}{3} > 0$;
в) $4^x - 10\cdot 2^x + 16 < 0$; г) $2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - \frac{5}{2} \geqslant 0$.

**170.** а) $x^2\cdot 3^x - 3^{x+1} \leqslant 0$; б) $3,7^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}} > 1$;
в) $x^2\cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$;
г) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

## 15. Лагарыфмічныя ўраўненні і няроўнасці

Рашыце ўраўненні (171—175).

**171.** а) $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$;
б) $\frac{1}{2}\lg(2x-1) = 1 - \lg\sqrt{x-9}$;
в) $\log_3\sqrt{x-5} + \log_3\sqrt{2x-3} = 1$;
г) $3\lg^2(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0$.



**172.** а) $2\log_5(\lg x) = \log_5(10 - 9\lg x)$;
б) $\lg(3^x + x - 17) = x\lg 30 - x$;
в) $2\lg(\lg x) = \lg(3 - 2\lg x)$;
г) $x - x\lg 5 = \lg(2^x + x - 3)$.

**173.** а) $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$; б) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;
в) $2\log_{\sqrt{3}} x + \log_x \frac{1}{3} = 3$; г) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_{x^2} x + \log_8 x = 16$.

**174.** а) $x^{\log_2 x - 2} = 8$; б) $x^{\log_5 x} = 125x^2$;
в) $x^{\lg x} = 10\,000$; г) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$.

**175.** а) $3\log_2^2\sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$;
б) $\log_{0,1}\sin 2x + \lg\cos x = \lg 7$;
в) $\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4)\log_7 5$;
г) $\lg(3\cdot 5^x + 24\cdot 20^x) = x + \lg 18$.

Рашыце няроўнасці (176—179).

**176.** а) $\log_2(x^2 - x - 4) < 3$; б) $\log_{\sqrt{3}-1}(5 - 2x) > 2$;
в) $\lg(x^2 - x + 8) \geqslant 1$; г) $\log_{\sqrt{7}-1}(3 - 2x) < 2$.

**177.** а) $2\log_2 x < 2 + \log_2(x+3)$;
б) $\log_{\frac{1}{6}}(10 - x) + \log_{\frac{1}{6}}(x - 3) \geqslant -1$;
в) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(12 - x) \geqslant -2$;
г) $\log_{0,5}(4 - x) \geqslant \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x - 1)$.

**178.** а) $\lg(x^2 + x - 6) - \lg(x + 3) \leqslant \lg 3$; б) $\log_2\frac{3x-1}{2-x} < 1$;
в) $\ln(x^2 + 3x - 10) - \ln(x - 2) \geqslant \ln 4$; г) $\log_3\frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1$.

**179.** а) $\log_2(4^x - 5\cdot 2^x + 8) > 2$; б) $\log_{0,5}^2 x + 6 \geqslant 5\log_{0,5} x$;
в) $\lg^2 x \geqslant \lg x + 2$; г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$.

## 16. Сістэмы рацыянальных ураўненняў і няроўнасцей

Рашыце сістэмы ўраўненняў (180—183).

**180.** а) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 9y = 12, \\ 4x - 12y = 16; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1,6y = 1. \end{cases}$

**181.** а) $\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$
в) $\begin{cases} \frac{y}{x} = 2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35; \\ x + y = 5. \end{cases}$

**182.** а) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\ x+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2y^3+x^3y^2=12,\\ x^2y^3-x^3y^2=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2y^3=16,\\ x^3y^2=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2-xy=28,\\ y^2-xy=-12.\end{cases}$

**183.** а) $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^3y^3=-8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y^4=5,\\ xy^2=2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^3+y^3=9,\\ xy=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5,\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13.\end{cases}$

**184.** Пры якім значэнні $a$ сістэма ўраўненняў:

а) $\begin{cases}x-5y=7,\\ ax-y=-3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y=a,\\ 2x+4y=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+ay=2,\\ 3x-2y=-6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-2y=2a\end{cases}$ —

мае адзінае рашэнне, не мае рашэнняў, мае бесканечнае мноства рашэнняў?

**185.** Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}2x>3-\frac{13x-2}{11},\\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9};\end{cases}$

б) $\begin{cases}x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+4}{3}\leqslant\frac{x-1}{4}-2,\\ 1{,}5x-2{,}5<x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x+1}{2}-\frac{x}{3}\geqslant\frac{x-1}{4}-x-2,\\ 0{,}5x<2-x;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2(3x-1)<3(4x+1)+16,\\ 4(2+x)<3x+8.\end{cases}$

## 17. Сістэмы ірацыянальных ураўненняў

Рашыце сістэмы ўраўненняў (186—188).

**186.** а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8,\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{xy}=12,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7.\end{cases}$

**187.** а) $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7,\\ xy=9;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\\ x-y=12;\end{cases}$ г) $\begin{cases}xy=64,\\ x-y+\sqrt{xy}=20.\end{cases}$



**188.** а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\frac{3}{4},\\ xy=1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5,\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3,\\ xy=8.\end{cases}$

## 18. Сістэмы трыганаметрычных ураўненняў

Рашыце сістэмы ўраўненняў (189—190).

**189.** а) $\begin{cases}\sin x\cos y=0{,}25,\\ \sin y\cos x=0{,}75;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-y=-\frac{1}{3},\\ \cos^2(\pi x)-\cos^2(\pi y)=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4\sin x\sin y=3,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sin^2 x=\cos x\cos y,\\ \cos^2 x=\sin x\sin y.\end{cases}$

**190.** а) $\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2,\\ \cos x\cos y=\frac{1}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=\frac{5\pi}{2},\\ \sin x+\cos 2y=-1;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4},\\ \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=3;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\cos 2y+\cos x=1,\\ x+y=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

## 19. Сістэмы паказальных і лагарыфмічных ураўненняў

Рашыце сістэмы ўраўненняў (191—196).

**191.** а) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\ 3^{x-y-1}=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^x-2^y=16,\\ x+y=9;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(\sqrt{5})^{x-y}=25,\\ 2^{6y-x-1}=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3^x+3^y=28,\\ x-y=3.\end{cases}$

**192.** а) $\begin{cases}4^{\log_4 2x}-y=-1,\\ 5^{2x-y}+5^x=5{,}2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2^x+3^y=17,\\ 2^{x+2}-3^{y+1}=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}3^{\log_3(y+x)}=2,\\ 2^{2x+y}=16;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(y-x)=4,\\ 3^x+2\cdot3^{y-2}=171.\end{cases}$

**193.** а) $\begin{cases}3^x\cdot7^y=63,\\ 3^x+7^y=16;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3^x-2^{2y}=77,\\ \sqrt{3^x}-2^y=7;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4^x\cdot4^y=64,\\ 4^x-4^y=63;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{2^x}-3^y=-7,\\ 2^x-3^y=-5.\end{cases}$

**194.** а) $\begin{cases}\lg x-\lg y=1,\\ \lg^2 x+\lg^2 y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2(x^2+y^2)=5,\\ 2\log_4 x+\log_2 y=4;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\lg x-\lg y=7,\\ \lg x+\lg y=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\log_2(x+1)=\log_2\left(y+\frac{1}{4}\right),\\ \log_2 x-2\log_2\left(y-\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}$

**195.** а) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)} = 15, \\ \log_3(x^2 - y^2) - \log_3(x - y) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(x^2-y^2)} = 25, \\ \log_5(x^2 - y^2) = \log_5(x + y). \end{cases}$

**196.** а) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 81, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

## 20. Задачы на састаўленне ўраўненняў і сістэм ураўненняў

**197.** Час, затрачаны аўтобусам на праходжанне адлегласці 325 км, у новым раскладзе руху аўтобусаў скарочаны на 40 мін. Знайдзіце сярэднюю скорасць руху аўтобуса па новаму раскладу, калі яна на 10 км/г большая за сярэднюю скорасць, прадугледжаную старым раскладам.

**198.** Маторная лодка, скорасць якой у стаячай вадзе роўна 15 км/г, прайшла ўніз па цячэнню ракі $139\frac{1}{3}$ км і вярнулася назад. Знайдзіце скорасць цячэння ракі, калі на ўвесь шлях затрачана 20 г.

**199.** Поезд павінен быў прайсці 220 км за пэўны час. Праз 2 г пасля пачатку руху ён быў затрыманы на 10 мін, і, каб прыйсці своечасова ў пункт прызначэння, ён павялічыў скорасць на 5 км/г. Знайдзіце першапачатковую скорасць поезда.

**200.** Пасля сустрэчы двух цеплаходаў адзін з іх пайшоў на поўдзень, а другі — на захад. Праз 2 г пасля сустрэчы адлегласць паміж імі была 60 км. Знайдзіце скорасць кожнага цеплахода, калі вядома, што скорасць аднаго з іх на 6 км/г большая за скорасць другога.

**201.** Два целы рухаюцца насустрач адно аднаму з двух пунктаў, адлегласць паміж якімі 390 м. Адно цела прайшло ў першую секунду 6 м, а ў кожную наступную праходзіла на 6 м больш, чым у папярэднюю. Другое цела рухалася раўнамерна са скорасцю 12 м/с і пачало рух праз 5 с пасля першага. Праз колькі секунд пасля таго, як пачало рухацца першае цела, яны сустрэнуцца?

**202.** На будаўніцтве чыгункі брыгада будаўнікоў за некалькі дзён павінна была па плану перамясціць 2160 м$^3$ грунту. Першыя тры дні брыгада выконвала штодзённа ўстаноўленую норму, а затым кожны дзень перавыконвала норму на 80 м$^3$, таму ўжо за дзень да тэрміну брыгада перамясціла 2320 м$^3$ грунту. Якая па плану дзённая норма брыгады?

**203.** Дзве групы студэнтаў, працуючы сумесна, закончылі пасадку дрэў на вучэбна-доследным участку за 4 дні. Колькі дзён спатрэбілася б на выкананне гэтай работы кожнай групе асобна, калі адна з груп магла б закончыць пасадку дрэў на 6 дзён хутчэй, чым другая?

**204.** Для перавозкі 60 т грузу запатрабавалі некалькі машын. У сувязі з тым што на кожную машыну пагрузілі на 0,5 т менш, чым было запланавана, дадаткова было запатрабавана яшчэ 4 машыны. Колькі машын было запланавана першапачаткова?

**205.** Два кавалкі латуні маюць масу 30 кг. Першы кавалак змяшчае 5 кг чыстай медзі, а другі кавалак — 4 кг. Колькі працэнтаў медзі змяшчае першы кавалак латуні, калі другі змяшчае медзі на 15 % больш, чым першы?

**206.** Да раствору, які змяшчае 40 г солі, дабавілі 200 г вады, пасля чаго масавая доля растворанай солі паменшылася на 10 %. Колькі вады змяшчаў раствор і якая была ў ім масавая доля солі?

**207.** Дзве аўтамашыны выехалі адначасова з аднаго пункта ў адным і тым жа напрамку. Адна машына рухаецца са скорасцю 50 км/г, другая — 40 км/г. Праз паўгадзіны з таго ж пункта ў тым жа напрамку выехала трэцяя машына, якая абагнала першую машыну на 1 г 30 мін пазней, чым другую. Знайдзіце скорасць трэцяй машыны.

**208.** Знайдзіце скорасць і даўжыню поезда, ведаючы, што ён праходзіў з пастаяннай скорасцю ўздоўж нерухомага назіральніка на працягу 7 с і затраціў 25 с на тое, каб праехаць з той жа скорасцю ўздоўж платформы даўжынёй 378 м.

**209.** З пунктаў $A$ і $B$, размешчаных на адлегласці 50 км, адначасова насустрач адзін аднаму выйшлі два пешаходы. Праз 5 г яны сустрэліся. Пасля сустрэчы пешаход, які ідзе з $A$ ў $B$, паменшыў скорасць на 1 км/г, а другі павялічыў скорасць на 1 км/г. Першы пешаход прыбыў у $B$ на 2 г раней, чым другі ў $A$. Знайдзіце першапачатковую скорасць кожнага пешахода.

**210.** На заводзе для вырабу аднаго электрарухавіка тыпу $A$ расходуецца 2 кг медзі і 1 кг свінцу, на выраб аднаго электрарухавіка тыпу $B$ — 3 кг медзі і 2 кг свінцу. Колькі электрарухавікоў кожнага тыпу было выраблена, калі ўсяго зрасходавалі 130 кг медзі і 80 кг свінцу?

**211.** Двое рабочых сумесна могуць выканаць планавае заданне за 12 дзён. Калі палавіну задання будзе выконваць адзін рабочы, а затым другую палавіну — другі, то ўсё заданне будзе выканана за 25 дзён. За колькі дзён можа выканаць заданне кожны рабочы?

**212.** З дзвюх вадкасцей, шчыльнасць якіх адпаведна 1,2 г/см$^3$ і 1,6 г/см$^3$, састаўлена сумесь масай 60 г. Колькі грамаў кожнай вадкасці ў сумесі і якая шчыльнасць сумесі, калі яе 8 см$^3$ маюць такую ж масу, як маса ўсёй менш цяжкай са змешаных вадкасцей?

**213.** Вылічыце масу і масавую долю (у працэнтах) серабра ў сплаве з меддзю, ведаючы, што, сплавіўшы яго з 3 кг чыстага се-

рабра, атрымаюць сплаў, які ўтрымлівае 90 % серабра, а сплавіўшы яго з 2 кг сплава, які ўтрымлівае 90 % серабра, атрымліваюць сплаў з 84 %-най масавай доляй серабра.

**214.** Па акружнасці, даўжыня якой 60 м, раўнамерна і ў адным напрамку рухаюцца два пункты. Адзін робіць поўны абарот на 5 с хутчэй за другі і пры гэтым даганяе другі пункт кожную мінуту. Знайдзіце скорасць кожнага пункта.

**215.** Сума квадратаў лічбаў дадатнага двухзначнага ліку роўна 13. Калі ад гэтага ліку адняць 9, то атрымаецца лік, запісаны тымі ж лічбамі ў адваротным парадку. Знайдзіце гэты лік.

**216.** Знайдзіце ўсе пары натуральных лікаў, рознасць квадратаў якіх роўна 55.

## § 5. ВЫТВОРНАЯ, ПЕРШАВОБРАЗНАЯ, ІНТЭГРАЛ І ІХ ПРЫМЯНЕННІ

### 21. Вытворная

**217.** Знайдзіце адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функцыі $f$, калі:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}1;$

б) $f(x)=\sqrt{x-1},\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}21;$

в) $f(x)=3-2x,\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}2;$

г) $f(x)=\frac{1}{x+1},\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}1.$

**218.** Карыстаючыся азначэннем, знайдзіце вытворную функцыі $f$ у пункце $x_0$, калі:

а) $f(x)=1-4x,\ x_0=3;$ б) $f(x)=1{,}5x^2,\ x_0=2;$

в) $f(x)=3x+2,\ x_0=5;$ г) $f(x)=x^3+1,\ x_0=-1.$

Знайдзіце вытворныя функцыі (219—222).

**219.** а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+5;$

б) $f(x)=(4-x^2)\sin x;$

в) $f(x)=(x^2+5)(x^3-2x+2);$

г) $f(x)=\frac{\cos x}{2-x^3}.$

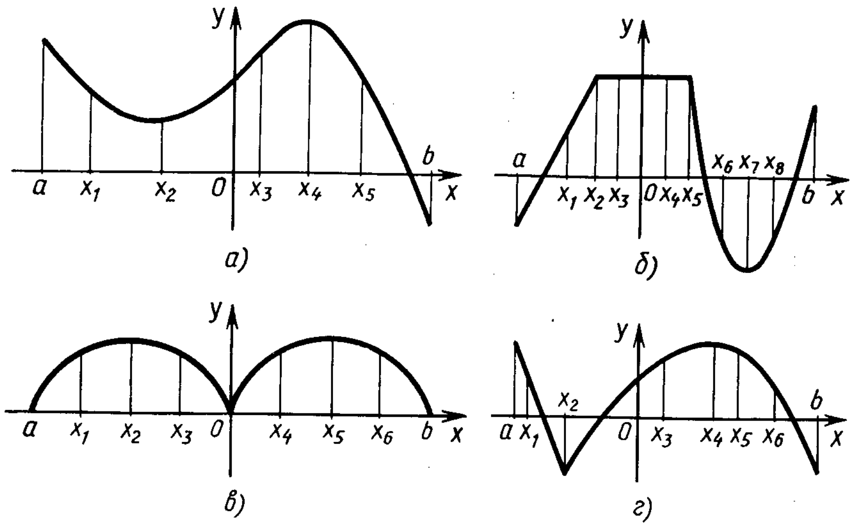
**220.** а) $f(x)=\frac{3}{x^3}-\sqrt[5]{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}};$ б) $f(x)=(2-\sqrt{x})\operatorname{tg} x;$

в) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1-2x};$ г) $f(x)=\frac{\sin x}{1-2\cos x}.$

**221.** а) $f(x)=2^x+\lg x;$ б) $f(x)=e^{-3x}+2\log_3 2x;$

в) $f(x)=x^2\cdot 5^{2x};$ г) $f(x)=\frac{\ln x}{e^x+e^{-x}}.$






Рыс. 153

**222.** а) $f(x)=\sin 3x+\cos 5x;$ б) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}+\frac{1}{(2x-1)^3};$

в) $f(x)=(3-2x^3)^5;$ г) $f(x)=\lg(3x)-3\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$

**223.** Рашыце ўраўненне $f'(x)=0$, калі:

а) $f(x)=x^4-2x^2+1;$ б) $f(x)=1{,}5\sin 2x-5\sin x-x;$

в) $f(x)=-\frac{x^5}{5}+\frac{10x^3}{3}-9x;$

г) $f(x)=x+\cos 2x.$

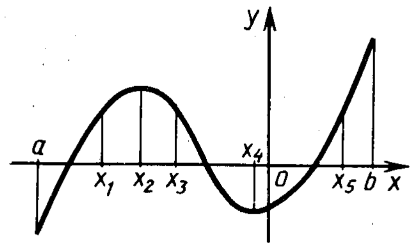
**224.** Функцыя зададзена графікам (рыс. 153).

1) Запішыце, у якіх з адзначаных пунктаў:

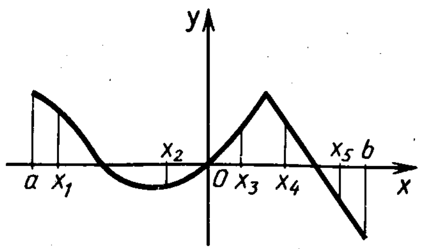
а) $f'(x)>0;$ б) $f'(x)<0;$ в) $f'(x)=0.$

2) Запішыце прамежкі, на якіх:

а) $f'(x)>0;$ б) $f'(x)<0;$ в) $f'(x)=0.$



Рыс. 154



Рыс. 155

3) У якіх пунктах інтэрвалу $(a;\ b)$ функцыя $f$ не мае вытворнай?

Параўнайце значэнні вытворнай у зададзеных пунктах (225—226).

**225.** а) $x_1$ і $x_2$; б) $x_1$ і $x_3$; в) $x_2$ і $x_4$; г) $x_3$ і $x_5$ (рыс. 154).

**226.** а) $x_1$ і $x_2$; б) $x_3$ і $x_5$; в) $x_4$ і $x_5$; г) $x_2$ і $x_4$ (рыс. 155).

**227.** Функцыі $u$, $v$, $w$ дыферэнцыруемыя ў пункце $x$. Дакажыце, што $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

## 22. Прымяненне вытворнай да даследавання функцый

**228.** Вылічыце прыбліжанае значэнне функцыі ў пунктах $x_1$ і $x_2$:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $x_1 = 2{,}0057$, $x_2 = 1{,}979$;

б) $f(x) = 2 + 4x - x^2 + \frac{1}{4}x^4$, $x_1 = 3{,}005$; $x_2 = 1{,}98$.

**229.** Вылічыце прыбліжанае значэнне выразу:

а) $\sqrt{9{,}009}$; б) $1{,}0001^{15}$; в) $0{,}999^{-5}$; г) $\sqrt[3]{8{,}008}$.

Знайдзіце прамежкі ўзрастання і ўбывання, пункты максімуму і мінімуму функцый (230—231).

**230.** а) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18$; б) $f(x) = \frac{2x^2}{3-x}$;

в) $f(x) = \frac{x(x^3-4)}{2}$; г) $f(x) = \frac{x}{4-x}$.

**231.** а) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$; б) $f(x) = 2 - \sin\frac{x}{2}$;

в) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$; г) $f(x) = 3x - \cos 3x$.

Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік (232—234).

**232.** а) $f(x) = x^2(x-2)^2$; б) $f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$; г) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

**233.** а) $f(x) = 1 - 2\sin 2x$; б) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

в) $f(x) = 3 - \cos\frac{x}{2}$; г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$.

**234.** а) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; б) $f(x) = \frac{e^x}{x}$;

в) $f(x) = 2^{x^2-4x}$; г) $f(x) = x - \ln x$.

**235.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f$ (калі яны існуюць) на дадзеным прамежку:

а) $f(x) = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$, $[1;\ 3]$;

б) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, $[0;\ \pi]$;



в) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2$, $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$;

г) $f(x) = \sin x - x$, $[-\pi;\ \pi]$.

**236.** Лік 10 запішыце ў выглядзе сумы двух неадмоўных складаемых так, каб сума кубаў гэтых лікаў была: а) найбольшай; б) найменшай.

**237.** Сума даўжынь катэтаў прамавугольнага трохвугольніка роўна 20 см. Якой даўжыні павінны быць катэты, каб плошча трохвугольніка была найбольшай?

**238.** Сума даўжынь дыяганалей паралелаграма роўна 12 см. Знайдзіце найменшае значэнне сумы квадратаў даўжынь усіх яго старон.

**239.** Па дзвюх вуліцах рухаюцца да перакрыжавання дзве машыны з пастаяннымі скорасцямі 40 км/г і 50 км/г. Лічачы, што вуліцы перасякаюцца пад прамым вуглом, і ведаючы, што ў некаторы момант часу аўтамашыны знаходзяцца ад перакрыжавання на адлегласці 2 км і 3 км (адпаведна), вызначце, праз які час адлегласць паміж імі стане найменшай.

**240.** Карціна вышынёй 1,4 м павешана на сцяну так, што яе ніжні край знаходзіцца на 1,8 м вышэй, чым вочы назіральніка. На якой адлегласці ад сцяны павінен стаць назіральнік, каб яго становішча было найбольш спрыяльным для агляду карціны (г. зн. каб вугал зроку па вертыкалі быў найбольшым)?

**241.** Статуя вышынёй 4 м стаіць на калоне, вышыня якой 5,6 м. На якой адлегласці павінен стаць чалавек ростам (да ўзроўню вачэй) 1,6 м, каб бачыць статую пад найбольшым вуглом?

**242.** З усіх цыліндраў, якія маюць аб'ём $16\pi$ м$^3$, знайдзіце цыліндр з найменшай плошчай поўнай паверхні.

**243.** Знайдзіце вышыню цыліндра найбольшага аб'ёму, які можна ўпісаць у шар радыусам $R$.

**244.** У конус, радыус асновы якога $R$ і вышыня $H$, трэба ўпісаць цыліндр, які мае найбольшую плошчу поўнай паверхні. Знайдзіце радыус цыліндра.

**245.** Каля дадзенага цыліндра трэба апісаць конус найменшага аб'ёму (плоскасці асноў цыліндра і конуса супадаюць). Як гэта зрабіць?

**246.** Знайдзіце вышыню конуса найменшага аб'ёму, апісанага каля шара радыусам $R$.

**247.** Знайдзіце вышыню конуса найменшага аб'ёму, апісанага каля паўшара радыусам $R$ так, каб цэнтр асновы конуса ляжаў у цэнтры шара.

**248.** З круглага бервяна дыяметрам 40 см трэба выразаць бэльку прамавугольнага сячэння з асновай $b$ і вышынёй $h$. Трываласць бэлькі прапарцыянальная $bh^2$. Пры якіх значэннях $b$ і $h$ трываласць бэлькі будзе найбольшай?

**249.** Акно мае форму прамавугольніка, завершанага паўкругам. Як вызначыць памеры акна, якое мае найбольшую плошчу пры зададзеным перыметры?

250. На акружнасці дадзены пункт $A$. Правесці хорду $BC$ паралельна датычнай да пункта $A$ так, каб плошча трохвугольніка $ABC$ была найбольшай.
251. Які павінен быць вугал пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка зададзенай плошчы, каб радыус упісанага ў гэты трохвугольнік круга быў найбольшым?
252. На парабале $y = x^2$ знайдзіце пункт, адлегласць ад якога да пункта $A(2;\ 0{,}5)$ найменшая.
253. Аб'ём правільнай трохвугольнай прызмы роўны $V$. Якой павінна быць старана асновы, каб поўная паверхня прызмы была найменшай?

## 23. Прымяненні вытворнай у фізіцы і геаметрыі

254. Па прамой рухаюцца два пункты. Вызначце прамежак часу, на працягу якога скорасць першага пункта была меншая за скорасць другога, калі: а) $x_1(t) = 2\frac{2}{3}t^3$, $x_2(t) = 2t - 3$; б) $x_1(t) = 9t^2 + 1$, $x_2(t) = t^3$.
255. Вугал павароту цела вакол восі змяняецца ў залежнасці ад часу па закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$. Знайдзіце вуглавую скорасць вярчэння цела ў момант часу $t = 20$ с. (Вугал вымяраецца ў радыянах.)
256. Круглы металічны дыск расшыраецца пры награванні так, што яго радыус раўнамерна павялічваецца на 0,01 см/с. З якой скорасцю павялічваецца плошча дыска ў той момант, калі яго радыус роўны 2 см?
257. З пункта $A$ па дзвюх прамых, вугал паміж якімі 60°, адначасова пачалі рухацца два целы. Першае рухаецца раўнамерна са скорасцю 5 км/г, другое — па закону $s(t) = 2t^2 - t$. З якой скорасцю яны аддаляюцца адно ад аднаго ў момант $t = 3$ г? ($s$ вымяраецца ў кіламетрах, $t$ — у гадзінах.)
258. Канцы адрэзка $AB$ даўжынёй 5 м слізгаюць па каардынатных восях. Скорасць перамяшчэння канца $A$ роўна 2 м/с. Якая велічыня скорасці перамяшчэння канца $B$ у той момант, калі канец $A$ знаходзіцца ад пачатку каардынат на адлегласці 3 м?
259. Даўжыня вертыкальнай лесвіцы роўна 5 м. Ніжні канец лесвіцы пачынае слізгаць з пастаяннай скорасцю 2 м/с. З якой скорасцю апускаецца ў момант часу $t$ верхні канец лесвіцы, з якім паскарэннем?
260. Неаднародны стрыжань $AB$ мае даўжыню 12 см. Маса яго часткі $AM$ расце прапарцыянальна квадрату адлегласці пункта $M$ ад канца $A$ і роўна 10 г пры $AM = 2$ см. Знайдзіце: 1) масу ўсяго стрыжня $AB$ і лінейную шчыльнасць у любым яго пункце; 2) лінейную шчыльнасць стрыжня ў пунктах $A$ і $B$.
261. Кола верціцца так, што вугал павароту прапарцыянальны квадрату часу. Першы абарот быў зроблены колам за 8 с. Знайдзіце вуглавую скорасць кола праз 48 с пасля пачатку вярчэння.



262. Цела з вышыні 10 м кінута вертыкальна ўверх з пачатковай скорасцю 40 м/с. Адкажыце на пытанні: а) На якой вышыні ад паверхні зямлі яно будзе праз 5 с? б) Праз колькі секунд цела дасягне найвышэйшага пункта і на якой адлегласці ад зямлі (лічыць $g = 10$ м/с$^2$)?
263. У якім пункце парабалы $y = -\frac{x^2}{2} - 1$ датычная нахілена да восі абсцыс пад вуглом: а) 45°; б) 135°?
264. Знайдзіце абсцысы пунктаў графіка функцыі $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 3$, датычныя ў якіх нахілены да восі абсцыс пад вуглом 135°.
265. Дакажыце, што любая датычная да графіка функцыі $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ перасякае вось абсцыс.
266. Дакажыце, што любая датычная да графіка функцыі $f(x) = x^5 + 2x - 7$ складае з воссю абсцыс востры вугал.
267. Дакажыце, што графікі функцый $f(x) = (x+2)^2$ і $g(x) = 2 - x^2$ маюць агульны пункт і агульную датычную, якая праходзіць праз гэты пункт.

## 24. Першавобразная

268. Знайдзіце агульны выгляд першавобразных для функцыі:
а) $f(x) = 4\sin x + \cos 3x$; б) $f(x) = x^2 + x^{-5} + x^{2+\sqrt{3}}$;
в) $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$; г) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 2x} + \frac{3}{\sin^2 3x}$.
269. Для функцыі $f$ знайдзіце першавобразную, графік якой праходзіць праз пункт $M$:
а) $f(x) = \frac{2}{x}$, $M\left(\frac{1}{e};\ 2\right)$;
б) $f(x) = x^{-2} + \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ -\frac{2}{\pi}\right)$;
в) $f(x) = x^{-4}$, $M(2;\ -3)$;
г) $f(x) = \sin 2x$, $M(0;\ 1)$.
270. Знайдзіце функцыю, вытворная якой роўна $2x - 3$ у любым пункце $x$ і значэнне якой у пункце 2 роўна 2.
271. Знайдзіце ўраўненне крывой, якая праходзіць праз пункт $A(2;\ 3)$, калі вуглавы каэфіцыент датычнай у пункце з абсцысай $x$ роўны $3x^2$.
272. Матэрыяльны пункт рухаецца па каардынатнай прамой са скорасцю $v(t) = \sin t \cos t$. Знайдзіце ўраўненне руху пункта, калі пры $t = \frac{\pi}{4}$ яго каардыната роўна 3.

**273.** Вылічыце:

а) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(1{,}5\pi + 0{,}5x)dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} (x^{-2} + x^2)dx$;

в) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x)dx$; г) $\int\limits_{-5}^{-2} (5 - 6x - x^2)dx$.

**274.** Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні інтэграла:

а) $\int\limits_{0}^{a} \cos\frac{x}{2}\,dx,\ a \in \boldsymbol{R}$; б) $\int\limits_{0}^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx,\ a \in \boldsymbol{R}$.

**275.** Вылічыце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі:

а) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3,\ y = 7 - x$;
б) $y = (x-2)^2,\ y = 4 - x^2$;
в) $y = x^2 - 3x + 4,\ y = x + 1$;
г) $y = x^2 - 2x + 2,\ y = 2 + 4x - x^2$.

**276.** Знайдзіце плошчу кожнай з фігур, на якія прамая $y = x + 4$ дзеліць фігуру, абмежаваную лініямі $y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = 8$.

**277.** Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай лініямі $y = 2{,}5 + 2x - 0{,}5x^2$, $x = -1$ і датычнай да дадзенай парабалы, якая праведзена праз яе пункт з абсцысай $x = 3$.

**278.** Знайдзіце плошчу фігуры, абмежаванай парабалай $y = x^2 - 4x + 5$ і датычнымі да яе, праведзенымі праз яе пункты з абсцысамі $x = 1$ і $x = 3$.

**279.** У якой адносіне дзеліцца плошча квадрата парабалай, якая праходзіць праз дзве яго суседнія вяршыні і датыкаецца да адной стараны ў яе сярэдзіне?

**280.** Пры якім значэнні $a$ плошча фігуры, абмежаванай лініямі $y = x^2 + 4x + a\,(a > 0)$, $x = 0$, $x = 2$ і $y = 2$, роўна 12? (Вядома, што фігура ляжыць у верхняй паўплоскасці.)

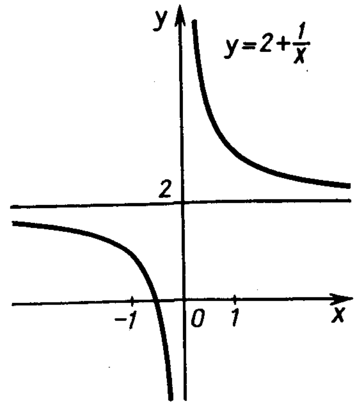
**281.** Знайдзіце пары лікаў $a$ і $b$, пры якіх функцыя $f(x) = a\sin\pi x + b$ задавальняе ўмовам $f'(2) = 2$, $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx = 4$.

# АДКАЗЫ І ЎКАЗАННІ ДА ПРАКТЫКАВАННЯЎ

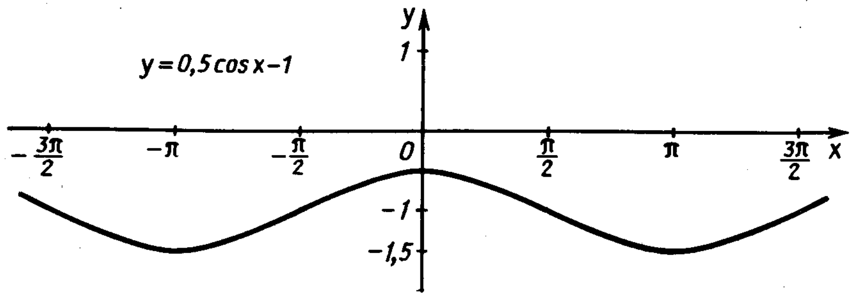
## Раздзел I

**1.** г) $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{\pi}{2}$. **2.** г) 225°; 270°; −105°. **3.** в) 4; г) 3. **4.** в) Не; існуюць; існуюць. **5.** в) Не; г) могуць. **6.** в) Не; г) могуць. **7.** г) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{8}{15}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{15}{8}$. **8.** г) −1. **9.** в) 1. **10.** б) $-\frac{24}{25}$; $\frac{161}{289}$; $\frac{84}{85}$; $-\frac{77}{85}$. **11.** в) $\mathrm{tg}\,\alpha$. **12.** б) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5}$; $-\cos\frac{\pi}{18}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $-\mathrm{ctg}\,0{,}1\pi$. **13.** г) 1. **14.** в) Не; г) правільная. **15.** г) $\frac{4}{\sqrt{17}}$; $-\frac{1}{\sqrt{17}}$; −4. **16.** в) 0,7833; 0,6216; 1,2602; 0,7936. **17.** б) 22°6″; 27°30′7″; 63°35′54″; 84°47′52″. **18.** в) 0,1 м; г) 9π м. **19.** в) 0,05 м². **20.** б) 1. **21.** в) 3; г) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **22.** в) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$. **27.** г) −2. **30.** в) IV; IV; II. **31.** г) Плюс. **36.** в) $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = [-2;\ 0]$. **37.** г) $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = [-1{,}5;\ 1{,}5]$. **38.** г) $(0;\ -1)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 0\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **39.** в) (0; 3,5). **41.** в) $\frac{1}{x_0} + 1$; $\frac{1}{a+2} + 1$. **42.** в) Не. **43.** в) $(-\infty;\ -4) \cup (-4;\ 2) \cup (2;\ \infty)$. **44.** в) Лікавая прамая, акрамя лікаў $\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **45.** в) $D(y) = E(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ \infty)$. **46.** г) $D(y) = [-4;\ 3]$, $E(y) = (-1;\ 4]$. **49.** г) Рыс. 1. **50.** в) Выконваем расцяжэнне графіка функцыі $y = \cos x$ уздоўж восі ардынат ($k = 0{,}5$), а затым перанос на вектар $(0;\ -1)$, рыс. 2. **52.** г) $S_1(x) = x^2$, $D(S_1) = \left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; $S_2(x) = a^2 - x^2$, $D(S_2) = \left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. **53.** в) $[-2;\ 1{,}5) \cup (1{,}5;\ \infty)$. **54.** г) $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = [1;\ 1{,}5]$.

**64.** г) 3π. **65.** в) π. **67.** г) $\frac{4\pi}{3}$. **68.** в), г) Не. **69.** г) Няцотная. **70.** в) Ні цотная, ні няцотная. **72.** г) Цотная. **73.** г) 2π. **77.** г) Узрастае на $[-4;\ -2]$, $[0;\ 2]$, $[4;\ 6]$; убывае на $[-6;\ -4]$, $[-2;\ 0]$, $[2;\ 4]$; $x_{max} = -2$, $x_{max} = 2$, $x_{min} = -4$, $x_{min} = 0$, $x_{min} = 4$, $y(-2) = y(2) = 3$, $y(0) = 0$, $y(-4) = y(4) = -2$. **82.** г) Узрастае на $[3;\ \infty)$; убывае на $(-\infty;\ 3]$; $x_{min} = 3$, $y(3) = 0$. **83.** в) Узрастае на $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ \infty)$; пунктаў экстрэмуму няма. **84.** г) Узрастае на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывае на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y\left(\frac{\pi}{2} +\right.$



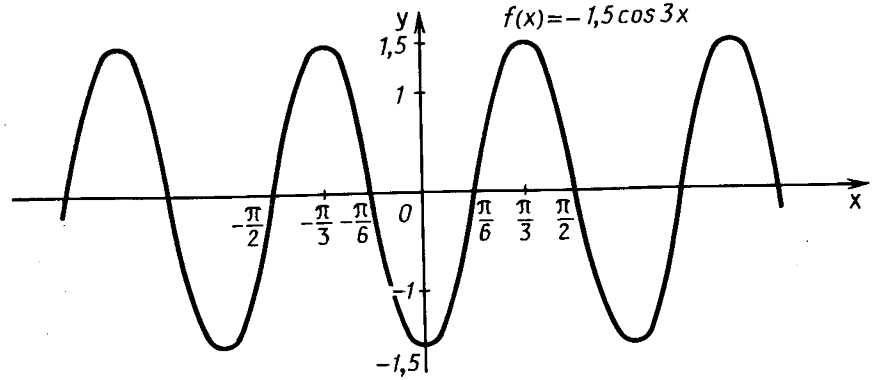
Рыс. 1




Рыс. 2

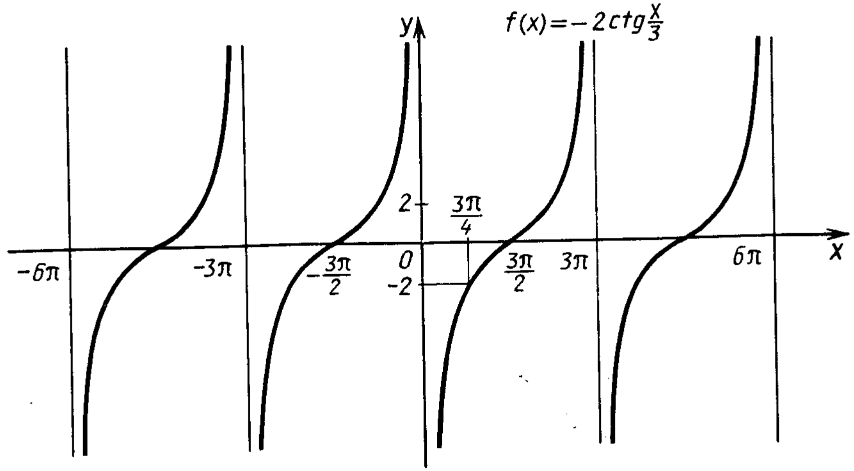
$+2\pi n\Big) = -1$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = -2$, $n \in \mathbf{Z}$. **85.** г) Узрастае на $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, убывае на $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$; $x_{\max}=2\pi n$, $y(2\pi n)=0$, $x_{\min}=\pi+2\pi n$, $y(\pi+2\pi n)=-2$, $n\in \mathbf{Z}$. **86.** в) Першы большы. **87.** г) $\sin(-1{,}2)$, $\sin 0{,}8$, $\sin 1{,}2$. **88.** г) Убывае на $(-\infty;\ -1]$; $[0;\ 1]$, узрастае на $[-1;\ 0]$, $[1;\ \infty)$; $x_{\max}=0$, $y(0)=0$, $x_{\min}=\pm1$, $y(-1)=y(1)=-1$. **89.** в) Узрастае на $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, убывае на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=1$, $x_{\min}=\frac{4\pi}{3}+2\pi n$, $y\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)=-1$, $n\in \mathbf{Z}$. **90.** в) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{10}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{15}$, $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$. **91.** в), г) Указанне. Выкарыстайце ўласцівасці функцый $y=x^6$ і $y=x^5$. **92.** б) Указанне. Няхай $-b\leqslant x_1<x_2\leqslant -a$, тады $a\leqslant -x_2<-x_1\leqslant b$ і $f(-x_2)>f(-x_1)$, паколькі $f$ убывае на $[a;\ b]$, значыць, $f(x_2)<f(x_1)$. **93.** в) 1) $D(f)=[-6;\ 6]$, $E(f)=[-2;\ 2]$; 2) функцыя няцотная; 3) $(-4;\ 0)$, $(0;\ 0)$, $(4;\ 0)$ — пункты перасячэння з воссю $Ox$, $(0;\ 0)$ — пункт перасячэння з воссю $Oy$; 4) $f(x)>0$ на $(-4;\ 0)$, $(4;\ 6]$, $f(x)<0$ на $[-6;\ -4)$, $(0;\ 4)$; 5) $f$ узрастае на $[-6;\ -2]$, $[2;\ 6]$, убывае на $[-2;\ 2]$; 6) $x_{\min}=2$, $f(2)=-2$, $x_{\max}=-2$, $f(-2)=2$. **96.** г) 1) $D(f)=E(f)=\mathbf{R}$; 2) $(1;\ 0)$, $(0;\ -1)$ — пункты перасячэння з восямі каардынат; 3) $f(x)<0$ на $(-\infty;\ 1)$, $f(x)>0$ на $(1;\ \infty)$; 4) $f$ узрастае на $\mathbf{R}$. **97.** в) 1) $D(f)=[-1;\ \infty)$, $E(f)=[0;\ \infty)$; 2) $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$ — пункты перасячэння з восямі; 3) $f(x)>0$ на $[-1;\ \infty)$; 4) $f$ узрастае на $[-1;\ \infty)$. **98.** в) 1) $D(f)=E(f)=\mathbf{R}$; 2) функцыя няцотная; 3) $(0;\ 0)$ — пункт перасячэння з восямі; 4) $f(x)<0$ на $(-\infty,\ 0)$, $f(x)>0$ на $(0;\ \infty)$; 5) $f$ узрастае на $\mathbf{R}$; г) 1) $D(y)=[2;\ \infty)$, $E(f)=[-2;\ \infty)$; 2) $(6;\ 0)$ — пункт перасячэння з воссю $Ox$; 3) $f(x)<0$ на $[2;\ 6)$, $f(x)>0$ на $(6;\ \infty)$; 4) $f$ узрастае на $[2;\ \infty)$. **99.** в) 1) $D(f)=\mathbf{R}$, $E(f)=\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$; 2) функцыя цотная; 3) $(0;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$ — пункты перасячэння з восямі; 4) $f(x)<0$ на $(-\infty;\ -1)$, $(1;\ \infty)$, $f(x)>0$ на $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$; 5) $f$ узрастае на $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$, $[0;\ 0{,}5]$, $f$ убывае на $[-0{,}5;\ 0]$, $[0{,}5;\ \infty)$; $x_{\max}=\pm0{,}5$, $y(-0{,}5)=y(0{,}5)=0{,}25$, $x_{\min}=0$, $y(0)=0$. **100.** г) $-\cos\frac{\pi}{7}$, $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}$. **101.** в) $D(f)=\left(\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi(n+1)}{3}\right)$, $n\in \mathbf{Z}$, $E(f)=\mathbf{R}$. **102.** г) $f(x)>0$ пры $\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$,



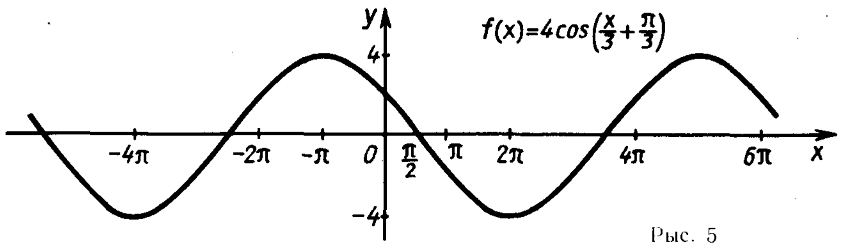



Рыс. 3

$f(x)<0$ пры $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi(n+1)}{2}$, $f(x)=0$ пры $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in \mathbf{Z}$. **103.** г) Узрастае на $\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$, убывае на $\left[\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $x_{\min}=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$. **104.** в) Графік функцыі паказаны на рысунку 3. **105.** в) Графік функцыі паказаны на рысунку 4. **106.** г) $A=0{,}5$, $T=4$, $\omega=\frac{\pi}{2}$, $x(t_1)=\frac{1}{4}$. **110.** в) $\mathbf{R}$, акрамя лікаў $2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **111.** в) $[0;\ \sqrt{2}]$; г) $(0;\ 2]$. **113.** в) Графік функцыі паказаны на рысунку 5. **114.** в) $A=12$, $T=1{,}2$, $I(t)=12\sin\frac{5\pi t}{3}$. **115.** г) $2\frac{2}{3}$. **118.** в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **120.** г) $\frac{3\pi}{4}$.




Рыс. 4



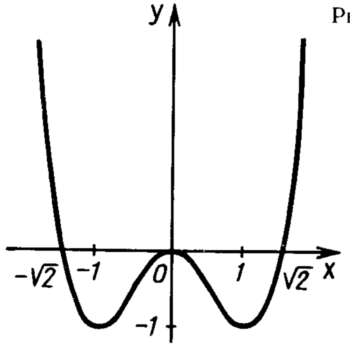

Рыс. 5

**121.** г) $-\frac{\pi}{4}$. **122.** в) $\frac{5\pi}{6}$; г) 0. **124.** в) Не; г) мае. **125.** б) Не. **126.** г) $-\frac{\pi}{3}$. **127.** в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{12}$. **128.** в) $-\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **129.** в) Першы меншы. **130.** в) 0,8948; 0,5010. **131.** г) $-\frac{3\pi}{2}$. **132.** б) Увядзём абазначэнні $\alpha = \arccos x_1$, $\beta = \arccos x_2$. Дапусцім, што $\alpha \leqslant \beta$. Паколькі $\alpha$ і $\beta$ належаць прамежку $[0; \pi]$, дзе косінус убывае, атрымаем $\cos\alpha \geqslant \cos\beta$, г. зн. $x_1 \geqslant x_2$, што супярэчыць умове. **133.** б) У к а з а н н е. Выкарыстайце прыём, які апісаны ў рашэнні практыкавання 132 (б). **136.** в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **138.** г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **139.** г) $(-1)^{n+1} \times \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **141.** в) $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **142.** в) $(-1)^n \cdot \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **143.** в) $\pm\arccos 0{,}3 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **145.** г) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **146.** г) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **147.** г) $(-1)^n \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{5} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **148.** в) $\left(\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n;\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi n;\ 1\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **149.** г) $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{8}$. **151.** в) $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$. **152.** в) $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$. **153.** г) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **154.** г) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **155.** в) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **156.** г) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **159.** в) $(4\pi n;\ \pi + 4\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **160.** г) $\left(\frac{17\pi}{24} + 2\pi n;\ \frac{25\pi}{24} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **161.** г) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **162.** г) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{5} + \frac{\pi n}{2};\ -\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{5} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **163.** в) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$. **164.** г) $(-1)^n \times \arcsin\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **165.** г) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **166.** г) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **167.** в) $x_1 + \pi n$, $x_2 + \pi n$, $x_1 = -\operatorname{arctg} 2 \approx -1{,}1071$, $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0{,}4636$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **168.** г) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **169.** в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **171.** г) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **172.** в) $(-1)^n \cdot \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **173.** в) $(-1)^{n+1} \times \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **174.** в) $\frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **175.** г) $\left(\frac{\pi}{2} - \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **176.** в) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

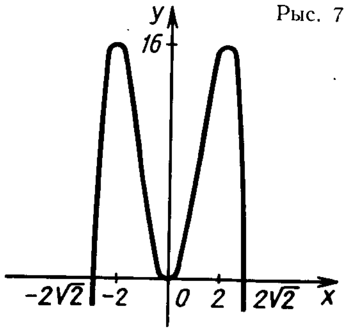


## Раздзел II

**177.** б) 3) 1,2881; 4) $\pi h(2R + h)$. **178.** г) 0,205. **179.** г) $\Delta x = 0{,}125$, $\Delta f = 0{,}1$. **180.** г) $\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$. **181.** в) 65 км/г. **182.** г) На 4 у адмоўным напрамку, $v_{\text{сярэдн}} = -2$. **184.** в) 1,5, востры. **185.** в) $6(2x + \Delta x)\Delta x$. **186.** г) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-2x_0 - \Delta x}{((x_0 + \Delta x)^2 + 1)(x_0^2 + 1)}$. **187.** в) $v_{\text{сярэдн}} = \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t)$. **188.** б) Мінус, плюс, мінус, плюс. **191.** б) 2,5; 2,1; 2,01. **192.** г) $-2$, $-4$. **193.** г) 5, $-2$. **194.** в) $-\frac{1}{4}$, $-1$. **195.** г) $y = 4x - 4$. **196.** в) 2; г) 5. **197.** в) Неперарыўная ў пунктах $x_1$, $x_2$, не з'яўляецца неперарыўнай у пункце $x_3$. **200.** в) 5,4. **201.** в) 6. **202.** г) 0,25. **204.** $h = 0{,}04$ дм. **206.** $h \approx 0{,}01$ дм. **208.** г) $3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. **209.** г) $-8x^3 + 9x^2 + 2$. **210.** в) $\frac{34}{(5x + 8)^2}$. **211.** в) $7x^6 - 20x^4 + 2$; г) $x - 9x^{-4}$. **212.** в) 1,5; 4. **213.** в) 4; $-1$. **214.** г) $(-\infty;\ -2)$, $(2;\ \infty)$. **215.** в) $\frac{3x^2(2x^6 - 4x^3 + 5)}{(1 - x^3)^2}$. **216.** в) $-1$. **217.** г) $(-\infty;\ 3)$, $(3;\ \infty)$. **218.** г) Напрыклад, $3x^3 - \frac{1}{2}x$. **219.** а) Не. **220.** г) $f(x) = 3x + \frac{\pi}{4}$, $g(x) = \cos x$. **221.** в) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^7$. **222.** в) $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. **223.** г) $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **224.** г) $-\frac{30}{(6x - 1)^6}$. **225.** г) $65(5x - 2)^{12} + 24(4x + 7)^{-7}$. **226.** в) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **227.** а) $3 - 2x^2$; в) $(3 - 2x)^2$. **228.** б) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$, $[0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$; в) $\sqrt{\cos x}$, $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **229.** б) $f(x) = x^2$, $D(f) = [0;\ \infty)$; г) $f(x) = -\sqrt{x - 1}$. **230.** г) $-15x^2(3 - x^3)^4 + \frac{1}{\sqrt{2x - 7}}$. **232.** г) $2\cos x - 1{,}5\sin x$. **233.** в) $\frac{1}{2\cos^2 x}$. **234.** г) 0; $-1$. **235.** г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **237.** б) $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **239.** г) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n$, $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi n;\ \frac{\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **240.** в) Напрыклад, $f(x) = -\sin x$. **241.** г) З'яўляецца, з'яўляецца. **242.** в) $\boldsymbol{R}$; г) $(-\infty;\ 2)$, $(2;\ \infty)$. **243.** в) 0,7. У к а з а н н е. Праверце, што $f(0{,}8) < 0$, $f(0{,}6) > 0$. **244.** г) $(-\infty;\ 1)$, $(2;\ 6)$. **245.** в) $(-\infty;\ -4)$, $[-2;\ -1)$, $[2;\ \infty)$. **246.** г) $(-\infty;\ -3] \cup (-1;\ 1) \cup [3;\ \infty)$. **247.** г) $m > 0$. **248.** г) $(-2;\ -1)$, $(1;\ 2)$. **249.** в) $(-2;\ 0)$, $(0;\ 3)$, г) $(-\infty;\ -5]$, $[2;\ \infty)$. **250.** в) $(-\infty;\ -4] \cup [0;\ 4]$. **253.** в) 3. **254.** г) 0. **255.** г) $y = 3x + 1$, $y = 12x - 17$. **256.** в) $y = 2$, $y = 1 + \frac{\pi}{2} - x$. **257.** в) $(-1;\ -1)$, $(0;\ 2)$, $(1;\ -1)$. **258.** г) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n - 1\right)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \sqrt{2}\left(2\pi n + 1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **259.** а) $\operatorname{arctg} 3$ у пункце $(0;\ 0)$, $\pi - \operatorname{arctg} 6$ у пунктах $(-\sqrt{3};\ 0)$ і $(\sqrt{3};\ 0)$; г) $\frac{\pi}{4}$ у пунктах $\left(\frac{\pi}{2} +\right.$

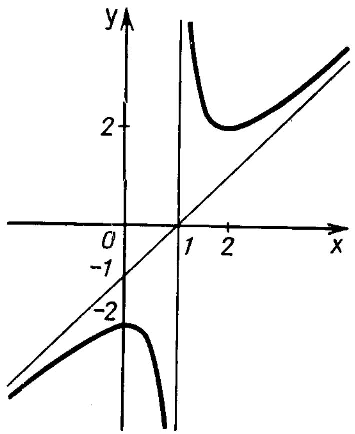



Рыс. 6




Рыс. 7

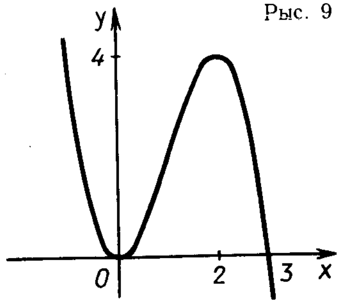
$+2\pi n;\ 0\Big)$, $\frac{3\pi}{4}$ у пунктах $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 0\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **260.** а) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **261.** в) 24,52, −0,16; г) 40,52, 9,86. **263.** г) 2,0004. **264.** г) 0,9302. **265.** в) 0,526. **266.** в) 0,1247. **267.** а) $(-t^2+4t+5)$ м/с; в) 5 с. **268.** 35 м/с; 22 м/с$^2$. **269.** $(6t-4)$ рад/с, 20 рад/с. **270.** а) 2,8 рад/с. **271.** $12t$ см/с; а) $\frac{1}{12}$ с; б) $\frac{1}{6}$ с. **272.** а) 6 с; б) 18 м/с. **274.** $22m$. **275.** а) 0,04 Н; б) 0,0025 Дж. **276.** а) 65 г/см; б) 125 г/см. **277.** $0<t<2\frac{2}{3}$. **278.** $\frac{8t^2-9t+21}{\sqrt{4t^2-6t+21}}$ пры $t>0$. **280.** г) Узрастае на $(-\infty;\ -3]$, $[3;\ \infty)$; убывае на $[-3;\ 3]$. **281.** в) Узрастае на $(-\infty;\ 2]$, $[2;\ \infty)$, убывае на $[-2;\ 2]$. **283.** г) Графік функцыі паказаны на рысунку 6. **284.** в) Графік функцыі паказаны на рысунку 7. **286.** г) $f'(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$, $f'(x)<0$ пры ўсіх $x$ з прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(2;\ \infty)$, значыць, $f$ убывае на $[-2;\ 0]$ і $[2;\ 3]$, $f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(2)>0$, $f(3)<0$, па тэарэме аб корані ўраўненне мае адзінае рашэнне на кожным з прамежкаў $[-2;\ 0]$, $[2;\ 3]$. **287.** б) $x_2$, $x_4$, $x_5$, $x_6$, $x_7$. **288.** в) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. г) $\pm 2$. **290.** в) $x_{max}=-1$, $x_{min}=0$; г) $x_{min}=\pm 1$, $x_{max}=0$.



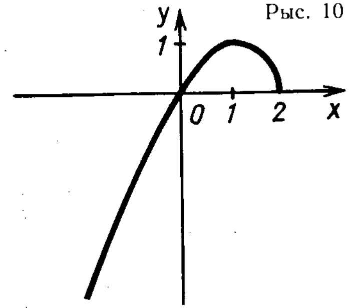

Рыс. 8

**291.** а) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x)\neq 0$ ні пры якіх $x$; $f'(x)$ не існуе пры $x=0$, але гэты пункт не з'яўляецца ўнутраным для прамежкаў $[0;\ \infty)$. **292.** в) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\pm\frac{2}{\sqrt3}$. **293.** в) $\pm 3$; г) 0; $\pm 2$. **295.** г) Графік функцыі паказаны на рысунку 8. **297.** г) Графік функцыі паказаны на рысунку 9. **298.** г) Узрастае на $(-\infty;\ -1]$, $[5;\ \infty)$, убывае на $[-1;\ 5]$. **300.** в) $D(f)=E(f)=\mathbf{R}$; $f$ — няцотная функцыя; $f(x)=0$ пры $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$; $f(x)>0$, калі $x\in$



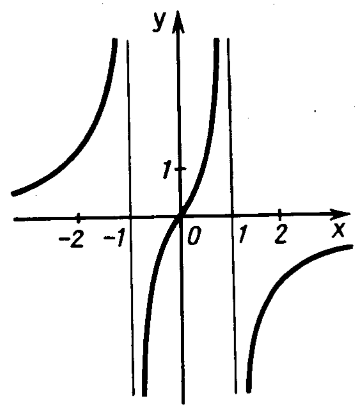



Рыс. 9

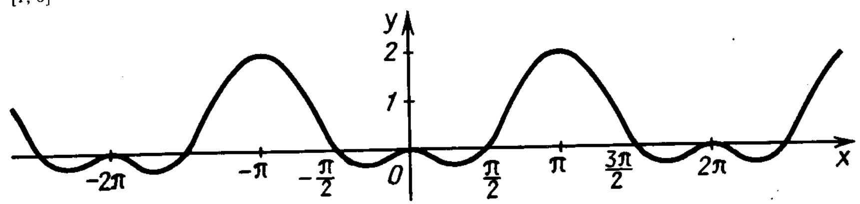



Рыс. 10

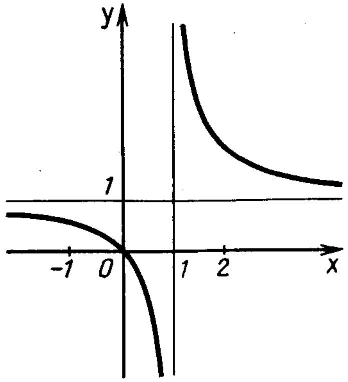
$\left(-\sqrt{\frac{20}{3}};\ 0\right)$, $x\in\left(\sqrt{\frac{20}{3}};\ \infty\right)$; $f(x)<0$, калі $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$, $x\in\left(0;\ \sqrt{\frac{20}{3}}\right)$; $f$ узрастае на $(-\infty;\ -2]$, $[2;\ \infty)$; $f$ убывае на $[-2;\ 2]$; $x_{max}=-2$, $f(-2)=4\frac{4}{15}$, $x_{min}=2$, $f(2)=-4\frac{4}{15}$; г) $D(f)=E(f)=\mathbf{R}$; $f$ — няцотная функцыя; $f(x)=0$, калі $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$; $f(x)>0$, калі $x\in\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $x\in\left(0;\ \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$; $f(x)<0$, калі $x\in\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};\ 0\right)$, $x\in\left(\sqrt{\frac{5}{3}};\ \infty\right)$; $f$ узрастае на $[-1;\ 1]$, убывае на $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ \infty)$; $x_{min}=-1$, $f(-1)=-2$; $x_{max}=1$, $f(1)=2$. **301.** в), г) Графікі функцый паказаны на рысунках 10, 11. **302.** в), г) Графікі функцый паказаны на рысунках 12, 13. **304.** в) 2; г) 3. **305.** в) $\max\limits_{[0;\ 2]} f(x)=f(2)=56$, $\min\limits_{[0;\ 2]} f(x)=f(1)=-2$; $\max\limits_{[2;\ 3]} f(x)=f(3)=594$, $\min\limits_{[2;\ 3]} f(x)=f(2)=56$; г) $\max\limits_{[-3;\ -2]} f(x)=f(-2)=2$, $\min\limits_{[-3;\ -2]} f(x)=f(-3)=1,5$; $\min\limits_{[1;\ 5]} f(x)=f(1)=\frac{1}{2}$, $\max\limits_{[1;\ 5]} f(x)=f(5)=\frac{5}{6}$. **307.** 6 с, 72 м/с. **308.**




Рыс. 11




Рыс. 12




Рыс. 13

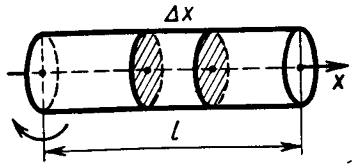
$\min\limits_{[-2;\,5]} f(x) = f(-2) = 9, \quad \max\limits_{[-2;\,5]} f(x) = f(2) = 25.$

**309.** 10 с. **310.** в) $\max\limits_{\left[0;\,\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\,\frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$; г) $\max\limits_{[-5;\,-2,5]} f(x) = f(-3) = -4$, $\min\limits_{[-5;\,-2,5]} f(x) = f(-5) = -5\frac{1}{3}$. **311.** $24 = 12 + 12$. **312.** $4 = 2 + 2$. **313.** 12 м, 12 м. **314.** $54 = 12 + 24 + 18$. **315.** $16 = 4 \cdot 4$. **316.** 8 см, 8 см. **317.** Вышыня — 1,5 дм, старана асновы — 3 дм. Р а ш э н н е. Няхай $x$ — старана асновы бака ($x > 0$). Выразім яго вышыню праз аб'ём і старану асновы. $13{,}5 = x^2 \cdot h$, $h = \frac{13{,}5}{x^2}$. Знойдзем паверхню бака $S = x^2 + 4x \cdot \frac{13{,}5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$. Знойдзем найменшае значэнне функцыі $S(x) = x^2 + \frac{54}{x}$ на прамежку $(0;\ \infty)$. $S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2}$, $x = 3$ — крытычны пункт. Функцыя ўбывае на $(0;\ 3]$, узрастае на $[3;\ \infty)$. Значыць, $\min\limits_{(0;\,\infty)} S(x) = S(3) = 27$. **318.** 30 см, 20 см. **319.** $20\sqrt{2}$ см, $20\sqrt{2}$ см. **320.** У пункт, аддалены на 3 км ад населенага пункта і на 12 км ад пункта шасэ, які знаходзіцца бліжэй да буравой вышкі. **321.** Да пункта адрэзка $AB$, аддаленага ад $B$ на 1 км. **322.** $-0{,}5$. **324.** Квадрат.

## Раздзел III

**327.** г) Не. **329.** в) Напрыклад, $-4x$. **331.** в) Не. **332.** в) Напрыклад, $x$. **334.** г) $f(x) = 3 - 2\sin x$. **336.** в) $x + \frac{1}{3x^3} + C$. **337.** г) $-\cos x - 2$. **339.** в) $-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$. **341.** г) $x(t) = -\cos t$. **343.** г) $-\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C$. **344.** в) $-\frac{4}{3(3x-1)} + C$. **345.** г) $-\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4{,}5$. **346.** в) $\frac{2}{3}\operatorname{tg}(3x + 1) - 3\cos(4 - x) + x^2 + C$. **347.** г) $-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4\frac{1}{3}$. **348.** $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - t$. **349.** $x(t) = 4\sin\frac{t}{2} + 2$. **350.** $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$. **351.** г) $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + t - 1\frac{2}{3}$. **352.** в) $-2$; другі. **353.** в) 2; г) $\frac{1}{2}$. **354.** в) $10\frac{2}{3}$; г) $\pi + 1$. **355.** в) $1\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{4}$. **356.** в) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **357.** г) 1. **358.** в) 0,9. **360.** г) $10\frac{2}{3}$. **361.** г) $5\frac{1}{3}$. **362.** г) 4. **363.** в) $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}$. **364.** г) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **365.** г) 4,5. **366.** г) $\frac{1}{12}$. **367.** $5\frac{1}{3}$. **368.** 4,5. **369.** а) Няхай $F(x)$ — першавобразная для $f(x)$, $G(x)$ — першавобразная для $g(x)$. Тады $F(x) + G(x)$ — першавобразная для $f(x) + g(x)$. Таму $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.






Рыс. 14

**370.** г) $\frac{16\pi}{15}$. **371.** г) $\frac{\pi}{6}$. **372.** а) $\frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$; б) $\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$. **373.** 0,16 Дж. **374.** 0,16 Дж. **375.** $\gamma q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. У к а з а н н е. $F(x) - \frac{\gamma q}{x^2}$, дзе $\gamma > 0$ — некаторая пастаянная. Таму $A = \int\limits_a^b \left(-\frac{\gamma q}{x^2}\right)dx = \frac{\gamma q}{x}\Big|_a^b$. **376.** $\frac{(a + 2b)h^2}{6}\rho g$ (у практыкаваннях 376—378 $\rho$ — шчыльнасць вады, $g$ — паскарэнне свабоднага падзення). У к а з а н н е. Сіла ціску вадкасці на апушчаную ў яе пласцінку (вертыкальную) вылічваецца па формуле $P = \rho g \int\limits_{h_1}^{h_2} S(x)dx$, дзе $S(x)$ — плошча пласцінкі, глыбіня апускання $h$ мяняецца ад $h_1$ да $h_2$. **377.** $\frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}$. **378.** $\frac{4}{3}\pi R^4 \rho g$. **379.** $\frac{\rho S \omega^2 l^3}{6} = 4\,160\,000\pi^2$ эрг. Р а ш э н н е. Маса часткі стрыжня, адзначаная на рысунку 14, роўна $\rho S \Delta x$; не ўлічваем дыяметр стрыжня (лічым адзначаную частку адрэзкам даўжынёй $\Delta x$), тады з дакладнасцю да велічынь парадку $\Delta x$ лінейная скорасць кожнага пункта гэтай часткі роўна $\omega x$. Абазначым праз $E(x)$ кінетычную энергію часткі $[0;\ x]$ стрыжня. Прырашчэнне кінетычнай энергіі за кошт адрэзка $[x;\ x + \Delta x]$ прыблізна роўна $\frac{mv^2}{2}$, г. зн. $\frac{\rho S \omega^2 x^2 \Delta x}{2}$, таму $E'(x) = \frac{\rho S \omega^2 x^2}{2}$; $E(0) = 0$, і, значыць, шукаемая энергія ёсць $E(l) = \int\limits_0^l E'(x)dx = \int\limits_0^l \frac{\rho S \omega^2 x^2 dx}{2} = \rho S \omega^2 \int\limits_0^l \frac{x^2}{2}dx = \frac{\rho S \omega^2 l^3}{6}$. **380.** Пункт вышыні конуса, які знаходзіцца на адлегласці $\frac{3}{4}$ вышыні, лічачы ад яго вяршыні.

## Раздзел IV

**384.** в) $-\frac{3}{2}$. **386.** в) $\pm 2$. **387.** г) $\pm\sqrt{17}$. **388.** г) $-1$. **391.** в) 6. **392.** г) $-5$. **393.** г) 2. **394.** в) $\frac{5}{4}$. **395.** г) 1,44. **396.** г) 2,22. **397.** в) 1,29. **399.** в), г) Першы меншы. **400.** в), г) Першы большы. **401.** в) Першы большы. **402.** в) $a^3 b\sqrt[4]{6b^2}$. **403.** г) $\sqrt[3]{4a^3b^3}$. **404.** в) $a \geqslant 0$; г) $a \geqslant 0$. **405.** а) $a = 0$; $a \leqslant 0$; г) пры ўсіх $a$. **406.** г) $\frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}$. **407.** г) $\frac{\sqrt[5]{5^4}}{3}$. **408.** г) $5\sqrt[5]{4}$. **409.** г) $\frac{1}{2}\sqrt[12]{320}$. **410.** г) $6^6$. **411.**

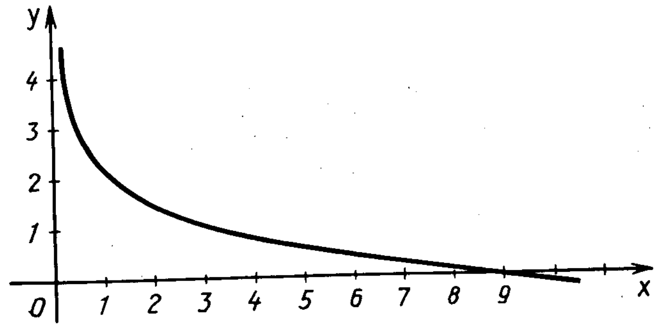
г) $(-\infty;\ \sqrt[3]{5}]$. **412.** г) [0; 81]. **414.** в) 0. **415.** г) 2. **416.** в) $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}{6}$. **417.** в) $\pm 6$. **418.** г) 8. **419.** г) 0, $-1$. **420.** в) $-10$; 2. **421.** в) (16; 81). **422.** г) 0; 0,4. **424.** г) $-12$. **425.** г) $\pm 2$. **426.** в) (16; 4), $\left(36;\ 1\frac{7}{9}\right)$. **427.** г) (27; 1), ($-1$; $-27$). **428.** г) $\sqrt{6^{-3}}$. **429.** в) $b^{-\frac{7}{13}}$. **430.** в) 32. **431.** в) $\frac{128}{27}$. **432.** г) $x^{\frac{1}{2}}\left(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)$. **433.** г) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$. **434.** г) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. **435.** г) $x-1$. **436.** г) Першы меншы. **437.** г) 10. **438.** г) $-\frac{1}{\sqrt{2}\,m}$. **440.** г) $\sqrt[21]{b^7c^6}$. **441.** в) Роўныя. **442.** г) Не. **443.** в) $(0;\ \infty)$. **444.** в) $a=\pm 1$; г) $a=0$. **446.** г) $(-2;\ \infty)$. **447.** г) Першы меншы. **448.** г) 9. **450.** г) $|x^{\pi}-y^{\pi}|$. **451.** в) 169,8; 173,8. **452.** $10^{\sqrt{5}}\approx$ $\approx 172{,}4$. **453.** г) $y=(3-\sqrt{7})^x$ — убывае, $y=\left(\frac{1}{3-\sqrt{7}}\right)^x$ — узрастае. **454.** г) $[1;\ \infty)$. **455.** г) $-1$; $-1\frac{2}{3}$. **457.** в) 0; г) 1. Указанне. З дапамогай эскізаў графікаў «угадваем» абсцысу пункта перасячэння $x=1$, застаецца даказаць, што іншых пунктаў перасячэння няма. Для гэтага выкарыстаем уласцівасці адпаведных паказальнай і лінейнай функцый. Пры $x>1$ функцыя $y=4^x$ прымае значэнні, большыя за 4, а функцыя $y=5-x$ — меншыя за 4. (Пры $x<1$ функцыі прымаюць адпаведна значэнні — меншыя і большыя за 4.) Значыць, іншых пунктаў перасячэння графікі не маюць. **458.** г) $-1$. **461.** в) 4; г) $\frac{1}{4}$. **462.** в) 4; г) $-3$; 1. **463.** в) 3; г) $-1$. **464.** в) 1; г) 1; 0. **465.** в) $(-2;\ -3)$; г) $\left(\frac{1}{2};\ 4\right)$. **466.** в) $[2;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ 2)$. **467.** в) $(-\infty;\ 0{,}5)$; г) $(-1;\ \infty)$. **468.** в) $-2$; г) 2. **469.** в) $-1$; г) 2. **470.** в) 2; г) 2. **471.** в) (1; 2), (2; 1); г) (2; 1,5). **472.** в) $[-3;\ -1]$; г) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$, $(4;\ \infty)$. **473.** в) $(-2;\ \infty)$; г) $(-\infty;\ 1)$. **474.** в) $(2;\ \infty)$; г) $[-1;\ \infty)$. **475.** в) $(-\infty;\ 0]$; г) $[1;\ \infty)$. **484.** г) $\frac{1}{49}$. **485.** г) 8. **486.** г) 3. **487.** г) $\log_5 5$, $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_5 1$, $\log_5 125$. **489.** г) $\frac{1}{2}$. **490.** г) $\frac{1}{25}$. **491.** г) $2\log_3 b-3-7\log_3 a$. **493.** г) $\frac{7}{4}\lg c-7-\frac{2}{3}\lg a-8\ \lg b$. **494.** г) $1+a+b$. **496.** в) $-2$. **497.** в) $\frac{m^5n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}}$. **498.** в) Рашэнне. Разгледзім рознасць паміж выразамі, якія змяшчаюцца ў левай і правай частках няроўнасці, параўнаем яе з нулём:

$$\log_3 7+\frac{1}{\log_7 3}-2=\frac{\log_3^2 7-2\log_3 7+1}{\log_7 3}=\frac{(1-\log_3 7)^2}{\log_7 3}>0.$$

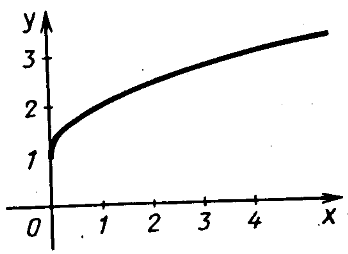
г) Рашэнне. Пераўтворым левую частку роўнасці: $3^{\log_2 5}=(5^{\log_5 3})^{\log_2 5}=$ $=5^{\log_5 3\cdot\log_2 5}=5^{\frac{\log_2 3}{\log_2 5}\cdot\log_2 5}=5^{\log_2 3}$. **499.** г) $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ \infty)$. **500.** в) $\left(-\frac{2}{3};\ 2\frac{1}{2}\right)$. **502.** в), г) Першы меншы. **503.** в), г) Першы большы. **505.** в) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **506.** в), г) 0. **507.** г) Графік функцыі паказаны на рысунку 15.



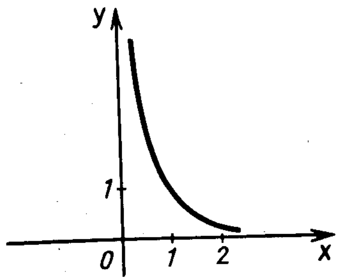
Рыс. 15



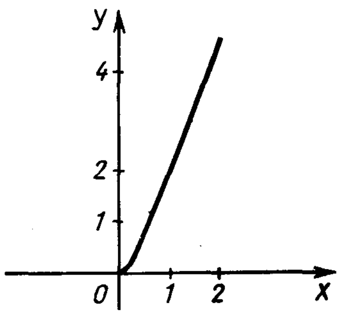

**508.** г) $\pi^{-2}$. **509.** в) 5. **510.** г) Не. **511.** в) 0; $-1$. **512.** в) $\log_2 10$. **513.** г) 100. **514.** в) $-2{,}35$. **515.** в) $\frac{2}{3}-\log_3 2$. **516.** в) $(0{,}7;\ \infty)$. **517.** в) $(8;\ \infty)$; г) $(12;\ \infty)$. **518.** в) 5; г) 0. **519.** в) 2; г) 0; 8. **520.** в) 25; $\frac{1}{5}$; г) 27; $\frac{1}{3}$. **521.** в) (32; 2), (2; 32); г) (1; 1). **522.** в) 4; г) 100, $10^8$. **523.** в) 9; г) $\frac{1}{2}$. **524.** в) 2; г) 2. **526.** в) (1; 3); г) $(-4;\ -3)\cup(4;\ 5)$. **527.** в) $(0;\ 0{,}001)\cup(10;\ \infty)$; г) $\left[\frac{1}{27};\ 27\right]$. **528.** в) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $(\sqrt[3]{0{,}1};\ 10)$. **529.** в) $\left(\frac{1}{27};\ 3\right)$; г) (9; 7). **530.** в) (2; 6); г) (9; 6). **531.** в) $g(x)=\frac{1-x}{2}$, $D(g)=E(g)=\boldsymbol{R}$. **533.** г) Графік паказаны на **532.** г) $g(x)=x^2-1$, $D(g)=[0;\ \infty)$, $E(g)=[-1;\ \infty)$. **538.** в) $-\frac{1}{2}e^x$. рысунку 16. **535.** в) $g(x)=x^4$, $x\leqslant 0$; г) $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$. **539.** г) $2xe^x+x^2e^x$. **540.** в) $y=1+x$; г) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)\ln 2$. **541.** г) $\frac{1}{2}e^x+x+C$. **542.** в) $\frac{7}{4\ln 2}\approx 2{,}5247$. **543.** г) $-2^{-x}\left(\ln 2\times\right.$ $\left.\times\operatorname{ctg}\frac{x}{3}+\frac{1}{3\sin^2\frac{x}{3}}\right)$. **544.** в) $\frac{3^x\,(2^x\ \ln\ 1{,}5+5^x\ \ln\ 0{,}6)}{(2^x+5^x)^2}$. **545.**




Рыс. 16




Рыс. 17



Рыс. 18

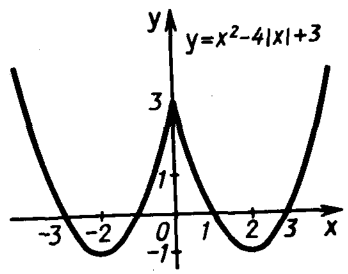
в) Узрастае на $(-\infty;\ 1]$, убывае на $[1;\ \infty)$; $x_{\max}=1$, $f(1)=\frac{1}{e}$. **546.** г) $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2{,}3^{x+1}}{\ln 2{,}3}+C$. **547.** г) $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}$. **548.** в) $\frac{3}{\ln 2}-2\approx 2{,}3$. **549.** в) $\frac{5}{1+5x}$. **550.** г) $\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$. **551.** в) $\ln|x+2|+C$. **552.** г) $y=\frac{x-2}{\ln 2}$. **553.** г) $\frac{1}{3}\ln 10\approx 0{,}7675$. **554.** в) $\frac{x(2\ln 5x-1)}{\ln^2 5x}$. **555.** в) Убывае на $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]$, узрастае на $\left[\frac{1}{2};\ \infty\right)$; $x_{\min}=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln 2$. **556.** в) Узрастае на $(0;\ e^2]$, убывае на $[e^2;\ \infty)$, $x_{\max}=e^2$, $f(e^2)=\frac{2}{e}$. **557.** в) $\frac{1}{2}\ln 8\approx 1{,}0397$. **558.** г) $-\sqrt{5}\,x^{-\sqrt{5}-1}$. Графік паказаны на рысунку 17. **559.** г) $2\ln 3\cdot(2x)^{\ln 3-1}$, графік паказаны на рысунку 18. **560.** г) 2,63. **561.** г) 2,0125. **562.** г) 27, $\frac{1}{8}$. **563.** г) $\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$. **564.** г) 844. **565.** г) $\ln 1\frac{2}{3}\approx 0{,}5108$. **567.** в) Не; г) $x_0=0$. **572.** г) Напрыклад, $y=2\cos\frac{x}{2}$. **573.** в) $x''=-9x$. **575.** в) $\frac{t\ln 2}{\ln m-\ln n}$. **576.** 9 мін. **577.** $\frac{1}{\lg 2}$ ч $\approx 3{,}322$ г; 0,6394. **578.** $\frac{10\lg 2}{\lg 1{,}6}$ мін $\approx 14{,}75$ мін. **580.** $500e^{-5}$ м/мін $\approx 3{,}37$ м/мін.

## Раздзел V

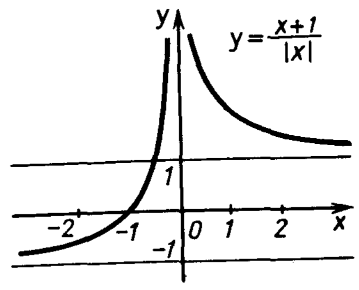
**1.** а) Правільнае; б), в) не; г) правільнае. **3.** а) 52 305; 52 335; 52 365; 52 395; 52 320; 52 350; 52 380; б) 52 344. **5.** 35. **6.** Указанне. Няхай дроб $\frac{ab}{a+b}$ скарачальны на лік $d$, $d$ — дзельнік $ab$, таму існуе агульны дзельнік $d'$ або ў ліках $a$, $d$, або ў ліках $b$, $d$; няхай для пэўнасці $d'$ — дзельнік $a$ і $d$, тады $a+b$ дзеліцца на $d'$, значыць, $b$ дзеліцца на $d'$, значыць, дроб $\frac{a}{b}$ скарачальны на $d'$. **13.** в) $1\frac{8}{90}$. **14.** а) Няхай $\sqrt{5}=\frac{p}{q}$, $p\in \mathbf{Z}$, $q\in \mathbf{N}$, $\frac{p}{q}$ — нескарачальны дроб, $\frac{p}{q}>0$, таму можна лічыць, што $p$ і $q$ — натуральныя лікі. Тады $5=\frac{p^2}{q^2}$, г. зн. $p^2=5q^2$, адкуль вынікае, што $p^2$, значыць, і $p$ дзеляцца на 5, г. зн. $p=5k$. Падстаўляючы $p=5k$ у роўнасць $p^2=5q^2$, атрымаем $25k^2=5q^2$, $q^2=5k^2$. З апошняй роўнасці відаць, што $q$ дзеліцца на 5. Атрымалі супярэчлівасць са зробленым дапушчэннем: аказалася, што дроб $\frac{p}{q}$ скарачальны на 5; в) калі $\sqrt{5}+1=r$ (дзе $r$ рацыянальны), тады $\sqrt{5}=r-1$ рацыянальны, што супярэчыць ірацыянальнасці $\sqrt{5}$. **19.** а) Роўныя; в) першы меншы; г) першы большы.



**31.** 87 або 69. **32.** 0. **34.** $b_1=0{,}2$; $q=5$. **36.** 5. **37.** 12,5; 7,5; 4,5; 1,5 або 2; 4; 8; 12. **38.** $q=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $S=3$. **39.** $b_1=6$; $q=0{,}5$. **43.** г) $\frac{x-3}{y}$. **44.** г) 2. **45.** г) 3. **47.** в) 1; г) 1. **48.** в) $x\sqrt{x}-\sqrt{x}$. **49.** г) $-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$. **50.** б) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$; г) $-\frac{c^{2,5}}{c^2+2}$. **51.** в) $c^{\frac{1}{2}}$; г) 3. **52.** б) $|\sin\beta+\cos\beta|$; г) $\sin\beta$. **53.** в) 1. **58.** б) $\frac{1-m}{1+m}$; г) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$. **59.** а) 0. **60.** а) Меншы за 0. **61.** 1. **62.** г) Першы большы. **63.** в) Першы большы. **64.** а) $4\frac{3}{4}$. **65.** б) 0,34. **66.** в) $-3$; г) 1. **67.** б) $4+4\log_{0,2}b-\frac{9}{7}\log_{0,2}c$. **68.** б) 14. **69.** г) 365,06446. **70.** $\lg 2\approx 0{,}3010$. **71.** $2-A$. **73.** б) $S=3\sqrt[3]{\frac{16v^2}{3}}$. **77.** в) $(-\infty;\ -\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5};\ -2)\cup(2;\ \sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\ \infty)$. **80.** в) $f(x)>0$ на $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ і $(5;\ \infty)$, $f(x)<0$ на $\left(\frac{8}{3};\ 5\right)$. **81.** Убывае на $(-\infty;\ 1)$ і на $(1;\ \infty)$. **85.** г) Гл. рыс. 19. **86.** а) Гл. рыс. 20. **87.** в), г) Маюць. **88.** в) Няхай $f(x)=x^5+3x-5$, $f(x)$ неперарыўная, пры гэтым $f(1)=-1<0$, $f(2)=33>0$. **91.** $a=3$, $b=-5$. **92.** в) $a>0$, $b<0$, $c>0$, $D<0$; г) $a<0$, $b<0$, $c=0$, $D>0$; д) $a<0$, $b<0$, $c<0$, $D<0$. **93.** а) Могуць (квадратычная віду $y=ax^2+b$ і лінейная віду $y=b$). **94.** в) $y=\frac{x^2}{x^4-1}+\frac{x^3-x}{x^4-1}$. **96.** в) Усе лікі, акрамя лікаў віду $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **97.** в) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in \mathbf{Z}$. **98.** г) $[-1;\ 1]$. **99.** г) $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$. **100.** в) $y>0$ на $\left(-\frac{5\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{\pi}{2}+4\pi n\right)$, $y<0$ на $\left(\frac{\pi}{2}+4\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+4\pi n\right)$, $n\in \mathbf{Z}$. **101.** в) Няцотная; г) цотная. **102.** г) $\pi$. **103.** в) Убывае на $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$, узрастае на $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $x_{\min}=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. **104.** г) $\min\limits_{D(y)} y=1$, $\max\limits_{D(y)} y$ не існуе. **105.** б) Указанне.



Рыс. 19

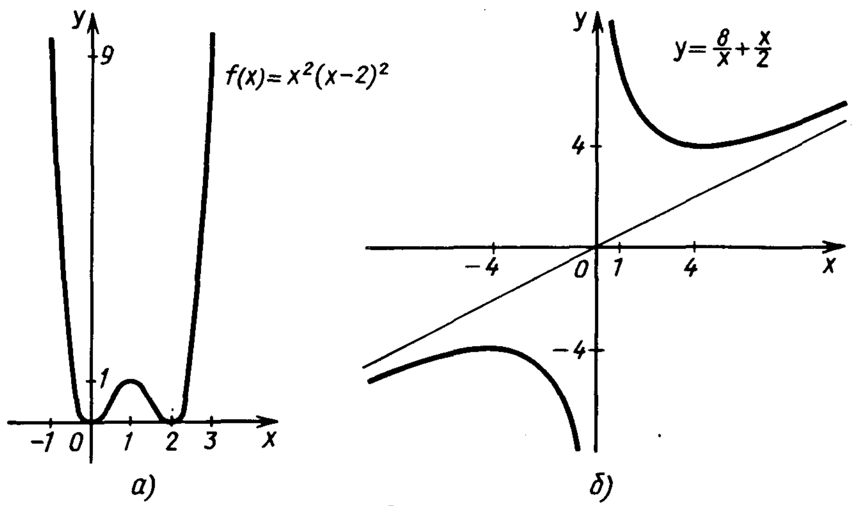


Рыс. 20

$y=|\sin x|$. **108.** Вынікае. **109.** в) $\operatorname{tg} 2<-1<\operatorname{ctg} 2$. **111.** в) 0; г) 0. **112.** в) $(-\infty; 0)\cup[1; 4]$. **113.** в) $(-\infty; \infty)$; г) $(2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in \mathbf{Z}$. **114.** в) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)\cup(2; \infty)$. **115.** г) $(0; \infty)$. **116.** в) $[1; \infty)$. **117.** в) $y>0$ на $(-\infty; \log_3 2)$, $y<0$ на $(\log_3 2; \infty)$. **118.** в) $y>0$ на $[0; \infty)$. **119.** в) Ні цотная, ні няцотная. **120.** в) Цотная. **123.** а) Указанне. $y=x-1$ пры $x>1$, $D(y)=(1; \infty)$. **124.** г) $\min\limits_{[-1;8]} y=y(1)=0$, $\max\limits_{[-1;8]} y=y(-1)=4$. **125.** г) $\pm 3$. **126.** г) $(0; 3)$. **128.** а) 0; $\frac{\sqrt{65}-1}{8}$. **133.** г) $\left[\frac{14}{11}; \infty\right)$. **134.** в) $[1; 13]$; г) $[-1; 5]$. **135.** г) $-3{,}5$ і $[3; \infty)$. **137.** в) $-6$; г) 2; $-\frac{34}{99}$. **138.** а) 1; 2; $-7\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{2}$; 4; г) 0; $-1$; 3. **139.** а) $\frac{5}{3}$; в) $\frac{37}{9}$; г) $\frac{215}{27}$. **140.** в) $-\frac{4}{3}$; г) $-4$; $\frac{4}{3}$. **141.** в) $-1$; г) 1. **142.** в) $(-\infty; \infty)$; г) $(1; 13)$. **143.** г) $(-\infty; -4)\cup(6; \infty)$. **144.** в) $(1; 3)\cup(3; 5)$; г) $(3; 4)$. **146.** в) 2; г) $-4$; 4. **147.** в) 2; г) 63. **148.** в) 4; г) $-\frac{1}{3}$; 0. **149.** в) $-8$; 8; г) $-1$; $-3$. **150.** в) $(-\infty; -\sqrt{17}]\cup[\sqrt{17}; \infty)$; г) $(9; \infty)$. **151.** в) $[2; 3]$; г) $[-3; 5]$. **152.** а) $-\pi+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}+\pi n$ (або $\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$ — іншая форма адказу); г) $\operatorname{arctg} 0{,}5+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **153.** в) $\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **154.** в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $2\pi n$, $2\cdot(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **155.** в) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **156.** в) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **157.** в) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **158.** а) $-\frac{5}{4}$; б) 0; в) $-2\sqrt{3}-2$; г) $\varnothing$. **159.** в) $\left(\frac{4\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5}; \frac{8\pi}{15}+\frac{4\pi n}{5}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in\mathbf{Z}$. **160.** в) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(-\pi+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **161.** а) $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right]$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **162.** а) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; 2\pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **163.** в) 1; 5; г) 3; 9. **164.** в) 2; г) 1. **165.** в) 3; г) 0; $\frac{1}{4}$. **166.** в) $\pm\log_{\frac{5}{2}} 2$; г) 0; $\frac{1}{2}$. **167.** б) $\pm\arccos(\sqrt{2}-1)+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $-1$. **168.** в) $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$; г) $(-\infty; -4)\cup(3; \infty)$. **169.** в) $(1; 3)$; г) $(-\infty; -1]\cup[0; \infty)$. **170.** б) $(-5; 3)\cup(4; \infty)$. **171.** в) 6; г) 1001; $1+\sqrt[3]{10}$. **172.** в) 10; г) 3. **173.** г) 64. **174.** в) 100;

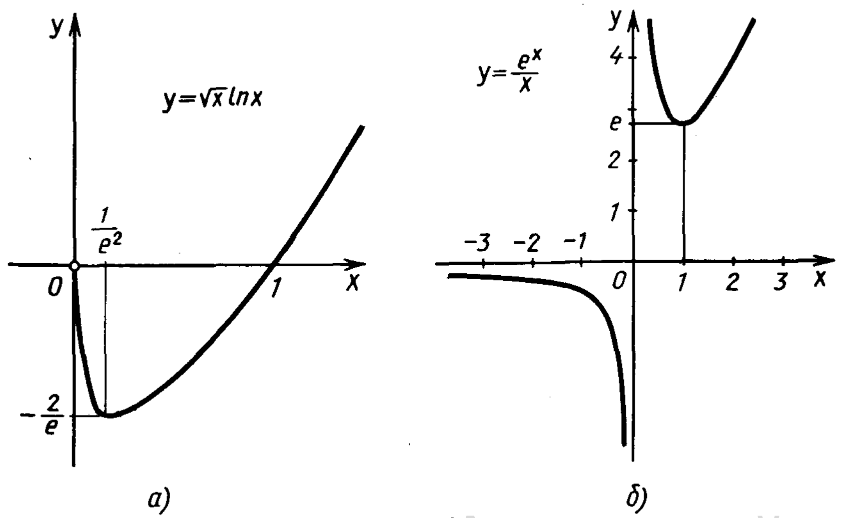


$\frac{1}{100}$; г) 3; 9. **175.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\arcsin\frac{1}{14}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **176.** а) $\left(-3; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 4\right)$; г) $\left(\sqrt{7}-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$. **177.** а) $(0; 6)$; г) $(1; 2]\cup[3; 4)$. **178.** в) $(2; \infty)$; г) $\left(\frac{5}{3}; \infty\right)$. **179.** в) $(0; 0{,}1]\cup[100; \infty)$; г) $(-\infty; 0]\cup[\log_6 5; 1)$. **180.** в) $\left(\frac{31}{7}; \frac{9}{7}\right)$; г) $\varnothing$. **181.** в) $(0{,}4; 0{,}8)$; г) $(2; 3)$; $(3; 2)$. **182.** в) $(0{,}5; 4)$; г) $(7; 3)$; $(-7; -3)$. **183.** в) $(1; 2)$; $(2; 1)$; г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **185.** в) $\left[-3; \frac{4}{3}\right]$; г) $(-3{,}5; 0)$. **186.** в) $(25; 49)$; г) $(9; 16)$; $(16; 9)$. **187.** в) $(16; 4)$; г) $(16; 4)$; $(-4; -16)$. **188.** в) $(81; 16)$; г) $(-1; -8)$; $(-8; -1)$. **189.** а) $\left(\frac{\pi}{4}-(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n-\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k$, $n\in\mathbf{Z}$; б) $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{6}; \frac{n}{2}+\frac{1}{6}\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $k$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+2\pi n\right)$, $k, n\in\mathbf{Z}$. **190.** б) $\left(\pi n; \frac{5\pi}{2}-\pi n\right)$; $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi n-\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi n-\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$; г) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; -\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **191.** а) $(2; 1)$; б) $(5; 4)$; в) $(5; 1)$; г) $(3; 0)$. **192.** а) $(1; 3)$; б) $(3; 2)$; в) $(2; 0)$; г) $(2; 6)$. **193.** а) $(2; 1)$; $(\log_3 7; \log_7 9)$; б) $(4; 1)$. **194.** а) $(100; 10)$; $(0{,}1; 0{,}01)$; б) $(4; 4)$; в) $(1\,000\,000; 0{,}1)$; г) $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **195.** а) $(27; 4)$; $\left(\frac{1}{81}; -3\right)$; б) $(2; -1)$; в) $(125; 4)$; $(625; 3)$; г) $(3; 2)$. **196.** а) $(4; 2)$; б) $(25; 36)$; в) $(1; 1)$; $(4; 2)$; г) $(512; 1)$. **197.** 75 км/г. **198.** 4 км/г. **199.** 55 км/г. **200.** 18 км/г, 24 км/г. **201.** 10 с. **202.** 240 м³. **203.** 6 і 12 дзён. **204.** 20. **205.** 25 %. **206.** 160 г, 20 %. **207.** 60 км/г. **208.** 21 м/с, 147 м. **209.** 6 км/г, 4 км/г. **210.** 20; 30. **211.** 20 і 30 дзён. **212.** 12 г, 48 г, 1,5 г/см³. **213.** 3 кг, 80 %. **214.** 4 м/с, 3 м/с. **215.** 32. **216.** 8 і 3; 28 і 27. **218.** в) 3; г) 3. **219.** г) $\frac{(x^3-2)\sin x+3x^2\cos x}{(2-x^3)^2}$. **220.** г) $\frac{\cos x-2}{(1-2\cos x)^2}$. **221.** г) $\frac{e^x+e^{-x}-x(e^x-e^{-x})\ln x}{x(e^x+e^{-x})^2}$. **222.** г) $\frac{1}{x\ln 10}-\frac{6}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$. **223.** г) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **225.** в) $f'(x_2)=f'(x_4)$; г) $f'(x_3)<0<f'(x_5)$. **228.** б) 25,375; 9,84. **229.** в) 1,005; г) $2+\frac{1}{1500}\approx 2{,}00067$. **230.** в) Узрастае на $[1; \infty)$, убывае на $(-\infty; 1]$, $x_{\min}=1$; г) узрастае на $(-\infty; 4)$ і $(4; \infty)$. **231.** в) Узрастае на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, убывае на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+$



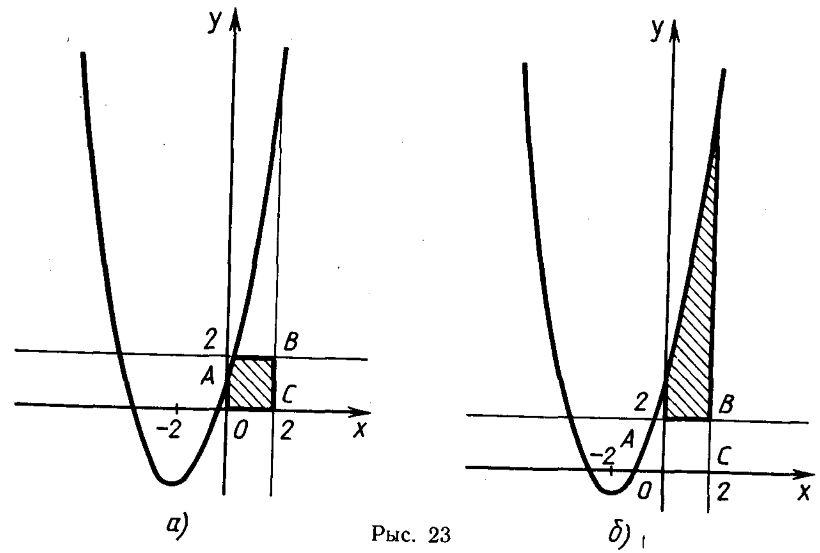

Рыс. 21

$+2\pi n$, $x_{\max}=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $x_{\min}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; г) узрастае на $(-\infty;\ \infty)$. **232.** а), б) Гл. рыс. 21. **234.** а), б) Гл. рыс. 22. **235.** в) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\ 1\right]} f=f\left(\frac{1}{2}\right)=4\frac{1}{4}$; $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\ 1\right]} f=f(1)=3$; г) $\max\limits_{[-\pi;\ \pi]} f=f(-\pi)=\pi$; $\min\limits_{[-\pi;\ \pi]} f=f(\pi)=-\pi$. **236.** а) $10+0$; б) $5+5$. **237.** 10 см, 10 см. **238.** 72 см$^2$. **239.** $\frac{23}{410}$ г. **240.** 2,4 м. **241.** $4\sqrt{2}$ м.




Рыс. 22






Рыс. 23

**242.** $h=2r$. **243.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **245.** $R=1{,}5$ г. **246.** $4R$. **247.** $H=R\sqrt{3}$. **248.** $b=\frac{40}{\sqrt{3}}$ см, $h=40\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. **249.** $R=\frac{p}{\pi+4}$; $H=\frac{p}{\pi+4}$. **250.** На адлегласці $1{,}5R$ ад пункта дотыку. **251.** 60°. **252.** $M(1;\ 1)$. **253.** $\sqrt[3]{4V}$. **254.** а) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$; б) $(6;\ \infty)$. **255.** 3,5 рад/с. **256.** $0{,}04\pi$ см$^2$/с. **257.** 8 км/г. **258.** $|v|=1{,}5$ м/с. **259.** $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ м/с, $\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$ м/с$^2$. **260.** 1) 360 г; $5x$ г/см; 2) 0; 60 г/см. **261.** $3\pi$ рад/с. **262.** а) 85 м; б) 4 с, 90 м. **263.** а) $M(-1;\ -1{,}5)$; б) $M(1;\ -1{,}5)$. **264.** $-\frac{1}{3}$; 0. **266.** $f'(x)=5x^4+2>0$ для любога $x$. **268.** в) $2x+3\ln|x-1|+C$; г) $\operatorname{tg}2x-\operatorname{ctg}3x+C$. **269.** в) $-\frac{1}{3x^3}-2\frac{23}{24}$; г) $-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$. **270.** $x^2-3x+4$. **271.** $y=x^3-5$. **272.** $-\frac{1}{4}\cos 2t+3$. **273.** в) $\frac{7-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{12}$; г) 39. **274.** а) 2; $-2$; б) 0,5; $-0{,}5$. **275.** в) $\frac{4}{3}$; г) 9. **276.** 18 і $\frac{74}{3}$. **277.** $10\frac{2}{3}$. **278.** $\frac{2}{3}$. **279.** 2; 1. **280.** $\frac{8}{3}$.

Р а ш э н н е. Дадзеная фігура заштрыхавана на рысунку (рыс. 23, *а* адпавядае $a<2$, а рыс. 23, *б* адпавядае $a\geqslant 2$). Пры $a<2$ плошча гэтай фігуры меншая за плошчу квадрата $OABC$, роўную 4, а пры $a\geqslant 2$ $S=\int\limits_0^2(x^2+4x+a)\,dx-S_{OABC}=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+ax\right)\Big|_0^2-4=\frac{8}{3}+8+2a-4=2a+\frac{20}{3}$, значыць, $2a+\frac{20}{3}=12$, адкуль $a=\frac{8}{3}$. **281.** $a=\frac{2}{\pi}$, $b=2$.

# ПРАДМЕТНЫ ПАКАЗАЛЬНІК

# ЗМЕСТ

## Раздзел V

## ЗАДАЧЫ НА ПАЎТАРЭННЕ

### § 1. Сапраўдныя лікі



### § 2. Тоесныя пераўтварэнні



### § 3. Функцыі



### § 4. Ураўненні, няроўнасці, сістэмы ўраўненняў і няроўнасцей



### § 5. Вытворная, першавобразная, інтэграл і іх прымяненні

$$F(x)=\int f(x)\,dx \qquad F'(x)=f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq-1$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$$

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

$$\int k f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

$$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)$$

$\frac{27}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{16}$

$$a^x a^y=a^{x+y} \qquad (ab)^x=a^x b^x$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y=a^{xy} \qquad a^0=1$$

$$a^{\log_a x}=x$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \qquad \log_a x^p=p\log_a x$$

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y \qquad \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a 1=0 \qquad \log_a a=1$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$$